

# **FFI RAPPORT**

## **PEILEMETODER**

SLÅSTAD Arne

**FFI/RAPPORT-2003/01520**



FFIE/832/113

Godkjent  
Kjeller 12. desember 2003

Torleiv Maseng  
Forskningsjef

## **PEILEMETODER**

SLÅSTAD Arne

FFI/RAPPORT-2003/01520

**FORSVARETS FORSKNINGSINSTITUTT**  
**Norwegian Defence Research Establishment**  
Postboks 25, 2027 Kjeller, Norge



**FORSVARETS FORSKNINGSINSTITUTT (FFI)**  
**Norwegian Defence Research Establishment**

**UNCLASSIFIED**

P O BOX 25  
 NO-2027 KJELLER, NORWAY  
**REPORT DOCUMENTATION PAGE**

**SECURITY CLASSIFICATION OF THIS PAGE**  
 (when data entered)

1) PUBL/REPORT NUMBER FFI/RAPPORT-2003/01520 1a) PROJECT REFERENCE FFIE/832/113	2) SECURITY CLASSIFICATION UNCLASSIFIED 2a) DECLASSIFICATION/DOWNGRADING SCHEDULE -	3) NUMBER OF PAGES 87		
4) TITLE PEILEMETODER  DIRECTION FINDING METHODS				
5) NAMES OF AUTHOR(S) IN FULL (surname first) SLÅSTAD Arne				
6) DISTRIBUTION STATEMENT Approved for public release. Distribution unlimited. (Offentlig tilgjengelig)				
7) INDEXING TERMS IN ENGLISH: <table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 50%; vertical-align: top;">           a) <u>Electronic Warfare</u>            b) <u>Electronic Reconnaissance</u>            c) <u>Direction finding</u>            d) <u>Emitter location</u>            e) _____         </td> <td style="width: 50%; vertical-align: top;">           IN NORWEGIAN:            a) <u>Elektronisk krigføring</u>            b) <u>Elektronisk oppklaring</u>            c) <u>Peiling</u>            d) <u>Emitterlokalisering</u>            e) _____         </td> </tr> </table>			a) <u>Electronic Warfare</u> b) <u>Electronic Reconnaissance</u> c) <u>Direction finding</u> d) <u>Emitter location</u> e) _____	IN NORWEGIAN: a) <u>Elektronisk krigføring</u> b) <u>Elektronisk oppklaring</u> c) <u>Peiling</u> d) <u>Emitterlokalisering</u> e) _____
a) <u>Electronic Warfare</u> b) <u>Electronic Reconnaissance</u> c) <u>Direction finding</u> d) <u>Emitter location</u> e) _____	IN NORWEGIAN: a) <u>Elektronisk krigføring</u> b) <u>Elektronisk oppklaring</u> c) <u>Peiling</u> d) <u>Emitterlokalisering</u> e) _____			
THESAURUS REFERENCE: 8) ABSTRACT <p>Determination of the positions of emitters is an important aspect in electronic reconnaissance and electronic warfare. The growth of the techniques of direction finding has been an evolution from the earliest methods based on amplitude comparison to the very advanced methods of super resolution.</p> <p>This document gives an overview of the different methods of direction finding and emitter location particular relevant to Army electronic reconnaissance and electronic warfare. The fundamental principle of the different methods and the way of working are described and explained</p>				
9) DATE 12. December 2003	AUTHORIZED BY This page only Torleiv Maseng	POSITION Director of Research		

**UNCLASSIFIED**

**SECURITY CLASSIFICATION OF THIS PAGE**  
 (when data entered)



**INNHOOLD**

	<b>Side</b>	
1	INNLEDNING	7
2	TRADISJONELLE PEILEMETODER	9
2.1	Peiling ved hjelp av en enkel direktiv antenne	9
2.2	Monopulsprinsippet	11
2.2.1	Monopulspeiler med 2 elementers array	11
2.2.2	Watson-Watt peileren	17
2.3	Dopplerpeileren	20
3	METODER BASERT PÅ MÅLING AV FASEFORSKJELL ELLER TIDSDIFFERANSE	22
3.1	Peilere basert på direkte fasemåling	23
3.1.1	Direkte fasemåling i tidsplanet	25
3.1.2	Beregning av differanse i fasevinkel ved hjelp av DFT	27
3.2	TDOA (Time Difference of Arrival)	28
3.3	Retningsbestemmelse i 3 dimensjoner	29
4	PEILERE SOM UTNYTTER STØRRE ARRAYER	31
4.1	Romlig Fouriertransformasjon	33
4.1.1	Romlig Fouriertransformasjon med lineært array	37
4.1.2	Romlig Fouriertransformasjon med sirkulært array	39
4.1.3	Oppsummering av egenskapene ved romlig Fouriertransform	42
4.2	"Super resolution" algoritmer	43
4.2.1	Beamforming	43
4.2.2	Pronys metode	47
4.2.3	MUSIC.	51
5	HYPERBOLSK POSISJONSBESTEMMELSE	65
6	OPPSUMMERING	69
	APPENDIKS	71
A.	DOPPLER-EFFEKTEN	71
A.1	Stillestående emitter og stillestående observatør	71
A.2	Stillestående emitter med observatør i bevegelse	71
A.3	Emitter i bevegelse med stillestående observatør	72
B	DIGITAL FOURIER-TRANSFORM	73
C	PRONY'S METODE VED ET VILKÅRLIG LANGT LINEÆRT ARRAY.	75

D	KOVARIANSMATRISENS MINSTE EGENVERDI I MUSIC ALGORITMEN	80
E	KOVARIANSMATRISENS EGENVERDIER OG EGENVEKTORER	84
F	CRAMER-RAO GRENSEN	85
	Litteratur	87



## PEILEMETODER

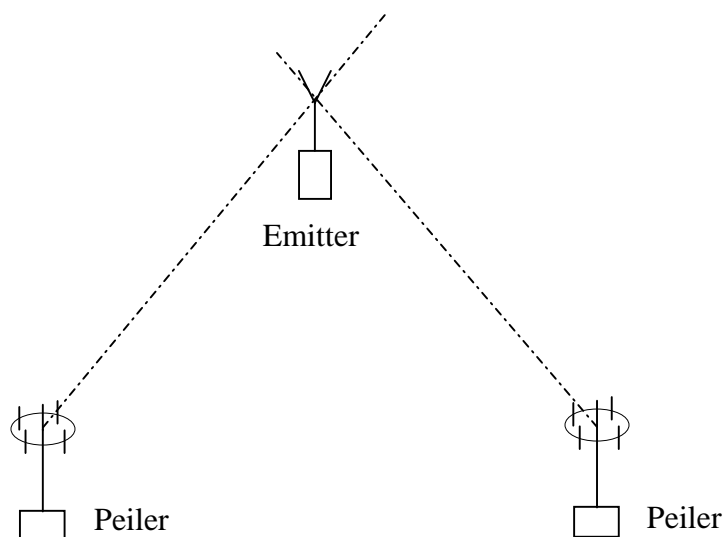
### 1 INNLEDNING

Emitterlokalisering er en viktig gren innen faget elektronisk krigføring. Emmitterlokalisering er å bestemme posisjonen til emittere av typen radiosendere og radarer. Hensikten med denne rapporten er å gi en oversikt over de metodene som finnes og de prinsipielle egenskapene som er innbakt i de forskjellige metodene. Det finnes tre hovedprinsipper for emitterlokalisering.

- Krysspeiling
- Hyperbolsk posisjonsbestemmelse
- Metoder basert på måling av differanse i dopplershift

Peiling er å bestemme retningen fra en peiler til en emitter. En retning som er bestemt ved hjelp av peiling betegnes ofte AOA (Angle of Arrival). En linje trukket fra peileren i peileretningen betegnes som LOP (Line of Position). Ved en del peileteknikker bestemmes peileretningen med en tvetydighet på  $180^\circ$ . Dersom en retning angis med tvetydigheten  $180^\circ$  betegnes linjen i peileretningen som LOB (Line of Bearing) (1).

Krysspeiling er illustrert i figur 1-1. En emitter peiles fra to posisjoner. Skjæringspunktet mellom linjene i peileretningene (LOB) angir emitterens posisjon.



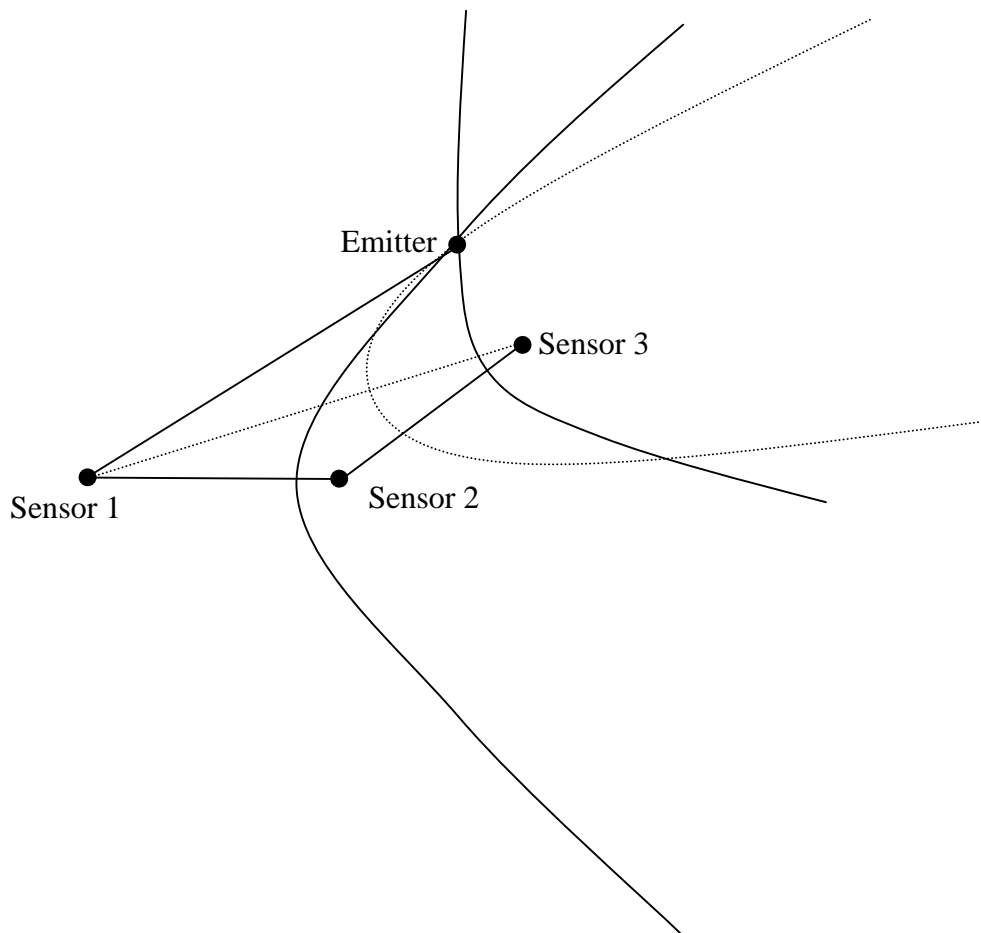
*Figur 1-1 Krysspeiling*

For peiling av radiosignaler finnes det 3 hovedmetoder.

- Metoder basert på måling av amplitude (signalstyrke).

- Metoder basert på måling av differanse i ankomsttidspunkt eller faseforskjell for et signal mottatt i to eller flere antenneelementer.
- Dopplerpeiler.

Ved hyperbolsk posisjonsbestemmelse måles differansen i radiobølgenes propagasjonstid fra en emitter til flere sensorer. Figur 1-2 illustrerer hyperbolsk posisjonsbestemmelse i et plan. Tidspunktene for når et signal mottas på sensorene 1, 2 og 3 måles og tidsdifferansen  $\Delta\tau_{12}$ , mellom når signalet mottas på sensor 1 og sensor 2 og tidsdifferansen  $\Delta\tau_{23}$ , mellom når signalet mottas på sensor 2 og sensor 3 beregnes.



Figur 1-2 Hyperbolsk emitterlokalisering i et plan

Differansen i avstand fra emitter til henholdsvis sensor 1 og sensor 2 er  $\Delta s_{12} = c\Delta\tau_{12}$  (hvor  $c$  er lysfarten  $3 \cdot 10^8$  m/s), tilsvarende er differansen i avstand fra emitter til henholdsvis sensor 2 og 3  $\Delta s_{23} = c\Delta\tau_{23}$ .

Det geometriske sted for de punkter hvis avstand til hver av de to sensorene har en konstant differens  $\Delta s$  er en hyperbel med sensorene i brennpunktene. Den konstante differansen mellom av-

standene fra brennpunktene til hyperbelen kalles styreavstand  $2d = \Delta s$ .

For å posisjonsbestemme emitteren konstrueres en hyperbelen med brennpunktene i henholdsvis sensor 1 og sensor 2 med styreavstand  $2d = \Delta s_{12}$  og en hyperbel med brennpunktene i sensor 2 og 3 med styreavstanden  $2d = \Delta s_{23}$ . Skjæringspunktet mellom disse to hyperbelene angir emitterens posisjon. Som det framgår av figur 1-2 må man ha 3 sensorer for å kunne lokalisere en emitter i et plan. For å lokalisere en emitter i rommet (også ta hensyn til høyden) trenger man 4 sensorer. En analytisk metode for emitterlokalisering ved hjelp av hyperbolsk posisjonsbestemmelse er gitt i kapittel 5.

Det finnes også metoder for emitterlokalisering basert på måling av differanse i dopplershiftet sett fra forskjellige sensorposisjoner. For at dopplershift skal kunne oppstå, må enten sensoren(e) eller emitteren være i bevegelse. Emitterlokaliseringsmetoder basert på måling av forskjell i dopplershift sett fra plattformer i forskjellige posisjoner, synes mest aktuelt når enten emitter eller sensoren(e) er flybåren(e). Disse metodene anses ikke spesielt aktuelle i Hær-EK og behandles ikke i dette dokumentet.

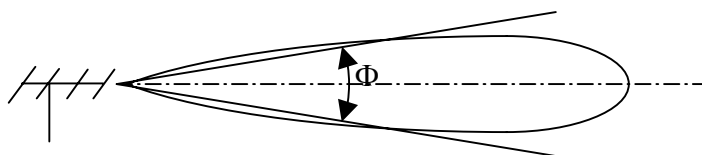
For lokalisering av kontinuerlige signaler (i motsetning til pulsradar) synes krysspeiling fortsatt å være den viktigste metoden.

## 2 TRADISJONELLE PEILEMETODER

Tradisjonelt har peiler vært basert på måling av amplitude (signalstyrke) mottatt i en antenne eller antennearray. I dopplerpeileren måles frekvensdifferansen mellom en stillestående og en roterende antenne. Måling av amplitude og måling av frekvensdifferanser kan utføres ved hjelp av relativt enkle teknikker, og peilere som baserer seg på disse prinsippene har vært kjent lenge.

### 2.1 Peiling ved hjelp av en enkel direktiv antenne

En enkel direktiv antenne kan benyttes til peiling. Ved å måle mottatt signalstyrke på antennen og orientere antennen i forskjellige retninger i rommet kan retningen til emitter bestemmes. Signalstyrken har sin maksimalverdi når antennen peker mot emitteren.



Figur 2-1 Illustrasjon av direktiv antenne

Nøyaktigheten av en slik peiler er avhengig av antennelobens åpningsvinkel (se figur 2-1). Sammenhengen mellom en antennes direktivitet  $D$  og antennelobens (3 dB) åpningsvinkel  $\Theta$  i horisontalplanet og  $\Phi$  i vertikalplanet er tilnærmet gitt av følgende formel (2).

$$D \approx \frac{4\pi}{\Theta \cdot \Phi} \approx \frac{41\,000}{\Theta^\circ \cdot \Phi^\circ} \quad (2.1)$$

Dersom antennen er tapsfri er direktiviteten  $D$  lik antennegainet  $G$  (For de aller fleste antenner er  $D \approx G$ ).

En antennes aparture eller "areal" er gitt av følgende formel (3)

$$A = \frac{D\lambda^2}{4\pi} \quad (2.2)$$

hvor  $\lambda$  er signalets bølgelengde, videre er:

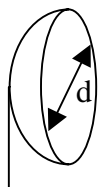
$$f = \frac{c}{\lambda} \quad (2.3)$$

hvor  $f$  er frekvensen og  $c$  er lysfarten ( $c = 3 \cdot 10^8$  m/s).

$$D = \frac{4\pi A}{\lambda^2} \quad (2.4)$$

En antennes aparture sier noe om antennens fysiske størrelse. En parabol antenne (figur 2-2) vil ha en aparture som er svært nær arealet av parabolens åpning. Dersom åpningen har diameteren  $d$  er antennens aparture gitt av følgende formel:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \quad (2.5)$$

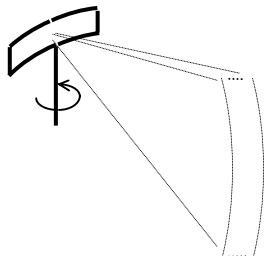


Figur 2-2 Parabolantenne

Forutsetningen for å kunne oppnå brukbare peileresultater med denne peilemetoden er at antennens åpningsvinkel er liten, det vil si stor direktivitet, likning (2.1). Det vil igjen si enten store

fysiske dimensjoner (stor aperture) eller høy frekvens (liten  $\lambda$ ), likning (2.4).

Peilere basert på en enkel direktiv antenne benyttes ofte i små håndholdte peilere hvor det er små krav til nøyaktighet, eller for peiling ved svært kort bølgelengde (radarfrekvenser).



Figur 2-3 Illustrasjon av spinnantenne.

En spinnantenne er en direktiv antenne som roterer. Peilere basert på spinnantenne benyttes ofte i peilere for høye frekvenser (radarfrekvenser).

## 2.2 Monopulsprinsippet

Monopulsprinsippet er en peilemetode hvor det benyttes et antennearray. Signalet fra to og to antenneelementer subtraheres. Differansen danner et markert nullpunkt når signalet kommer fra en bestemt retning.

Monopulsprinsippet er mest kjent fra målfølgingsradarer, men prinsippet brukes også i peilere for kommunikasjonsfrekvenser, men da ofte under andre navn og betegnelser. I monopuls målfølgingsradarer er vanligvis hvert element i arrayet en direktiv antenne (et horn), mens det i monopulspeilere for kommunikasjonsfrekvenser er vanlig å benytte par av dipoler, såkalte Adcock antenner (1).

### 2.2.1 Monopulspeiler med 2 elementers array

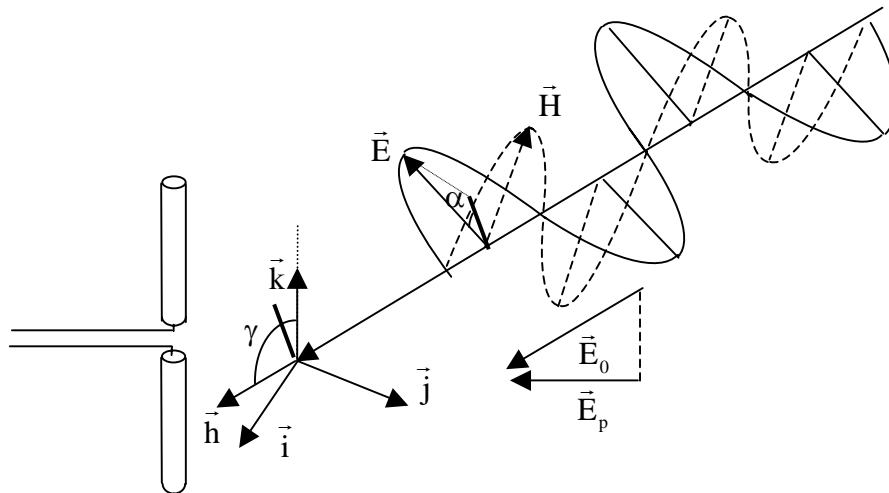
Figur 2-6 illustrer en radiobølge som mottas i en vertikal dipol antenne. Definerer et koordinatssystem med z akse parallelt med dipolen. Radiobølgens propagasjonsretning beskrives ved enhetsvektoren  $\vec{h}$  som danner vinkelen  $\gamma$  med z akse.

Komponenten av E-feltet som inducerer spenning i antennen betegnes  $E_p$  :

$$E_p = E \cos \alpha \sin \gamma \quad (2.6)$$

Vinkelen  $\gamma$  er vinkelen mellom propagasjonsretningen og antennens orientering. Vinkelen  $\alpha$  betegner polarisasjonsvinkelen. Vinkel  $\alpha$  er vinkelen mellom E feltets retning og en vektor

som står normalt på propagasjonsretningen og samtidig har en projeksjon i xy planet som faller sammen med propagasjonsretningens projeksjon i xy planet.



Figur 2-4 Illustrasjon av en radiobølge som mottas i en vertikal dipol antenne.

Radiobølgen kan også representeres som en vektor  $\vec{E}_0$  i propagasjonsretningen med tallverdien  $E \cos \alpha$  (som vist i figur 2-4).

$$E_0 = E \cos \alpha \quad (2.7)$$

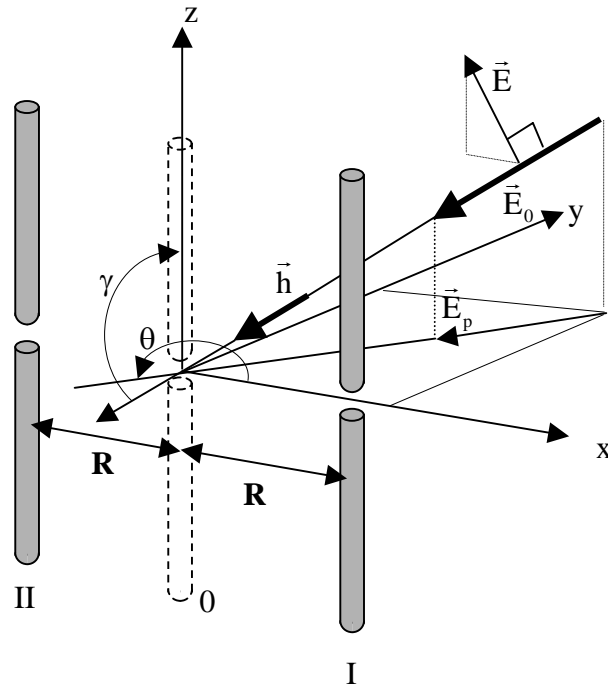
Projeksjonen av  $\vec{E}_0$  ned i xy planet er  $E_0 \sin \gamma$  og kan også anvendes til å representere induisert spenning i antenneelementet, se likning (2.6).

$$E_0 \sin \gamma = E_p = E \cos \alpha \sin \gamma \quad (2.8)$$

Den enkleste formen for antennearray består av to elementer som vist i figur 2-5. De to elementene betegnes henholdsvis element I og element II. Midt i mellom disse elementene defineres et element 0 som i de fleste beregninger defineres som et referanseelement. Element 0 kan være et imaginært element (det vil si innbilt eller ikke eksisterende) eller det kan være et virkelig element. Det defineres et koordinatsystem med origo i element 0, z akse parallelt med antenneelementene og x akse går igjennom begge antenneelementene. Avstanden fra origo til hvert antenneelement er R.

En radiobølge mottas av antennearrayet. Radiobølgen har propagasjonsretning  $\vec{h}$  og beskrives som  $\vec{E}_0 = E_0 \vec{h}$ . Projeksjonen av  $\vec{E}_0$  i xy planet er proporsjonal med induisert spenning i antennene, likning (2.6) og likning (2.8):

$$\vec{E}_p = E_0 \sin \gamma \cos \theta \vec{i} + E_0 \sin \gamma \sin \theta \vec{j} = E_0 \sin \gamma (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \quad (2.9)$$

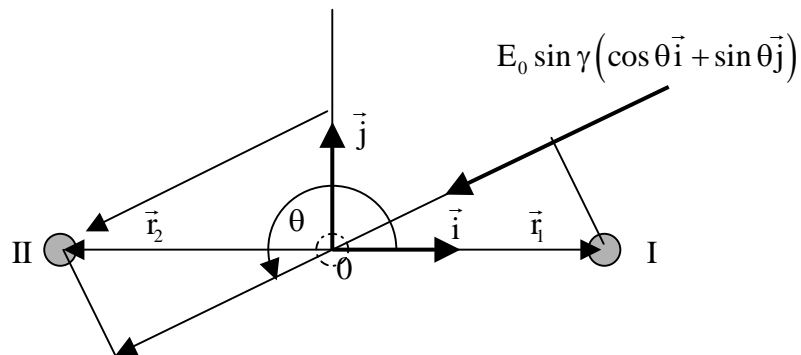


Figur 2-5 Antennarray bestående av 2 elementer.

Antenneelementene har følgende posisjoner:

Element I har posisjonen:  $\vec{r}_1 = R\vec{i}$

Element II har posisjonen:  $\vec{r}_2 = -R\vec{i}$



Figur 2-6 Prosjeksjon av 2 elementers array i xy planet

Faseforsinkelsen i element 1 referert til element 0 er:

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{r}_1 \cdot \vec{h} = \frac{2\pi}{\lambda} R \vec{i} \cdot \vec{h} = \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cos \theta \quad (2.10)$$

Faseforsinkelsen i element 2 referert til element 0 er:

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{r}_2 \cdot \vec{h} = \frac{2\pi}{\lambda} R (-\vec{i}) \cdot \vec{h} = -\frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cos \theta \quad (2.11)$$

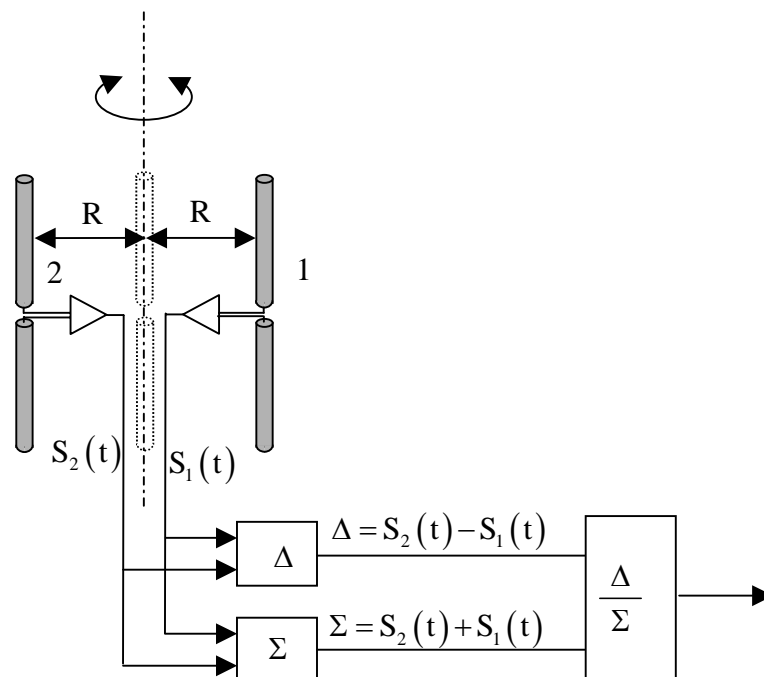
Signal mottatt på element 1 kan skrives på kompleks form som:

$$S_1(t) = E_0 \sin \gamma e^{j\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} \vec{r}_1 \cdot \vec{h}} = E_p e^{j\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cos \theta} \quad (2.12)$$

Signal mottatt på element 2 kan skrives på kompleks form som:

$$S_2(t) = E_0(t) \sin \gamma e^{j\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} \vec{r}_2 \cdot \vec{h}} = E_p e^{j\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cos \theta} \quad (2.13)$$

En monopulspeiler i et plan kan dannes av et array bestående av to elementer som illustrert i figur 2-7.



Figur 2-7 Illustrasjon av monopulsprinsippet

Signalene fra hvert av antenneelementene er henholdsvis  $S_1(t)$  og  $S_2(t)$  og gitt av ligningene



(2.12) og (2.13).

Det dannes to nye signal bestående av henholdsvis differansen  $\Delta$  og summen  $\Sigma$  mellom de to signalene  $S_1(t)$  og  $S_2(t)$ .

$$\begin{aligned} \Delta = S_1(t) - S_2(t) &= \operatorname{Re} \left\{ E_p e^{j\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} \bar{h}_1} - E_p e^{j\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} \bar{h}_2} \right\} = E_p e^{j\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cos \theta} - E_p e^{j\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cos \theta} = \\ E_p e^{j\omega t} 2j &\left( \frac{e^{\frac{j2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cos \theta} - e^{-\frac{j2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cos \theta}}{2j} \right) = 2j E_0 \sin \gamma \cdot \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cdot \cos \theta \right) \cdot e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \Sigma = S_1(t) + S_2(t) &= E_p e^{j\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} \bar{h}_1} + E_p e^{j\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} \bar{h}_2} = E_p e^{j\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cos \theta} + E_p e^{j\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cos \theta} = \\ E_p e^{j\omega t} 2 &\left( \frac{e^{\frac{j2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cos \theta} + e^{-\frac{j2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cos \theta}}{2} \right) = 2E_0 \sin \gamma \cdot \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} R \cdot \sin \gamma \cdot \cos \alpha \right) \cdot e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Amplituden av  $\Delta = S_1(t) - S_2(t)$  er

$$\Delta_{\text{amp}} = (S_1(t) - S_2(t))_{\text{amp}} = \left| 2E_0 \sin \gamma \cdot \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cdot \cos \theta \right) \right| \quad (2.16)$$

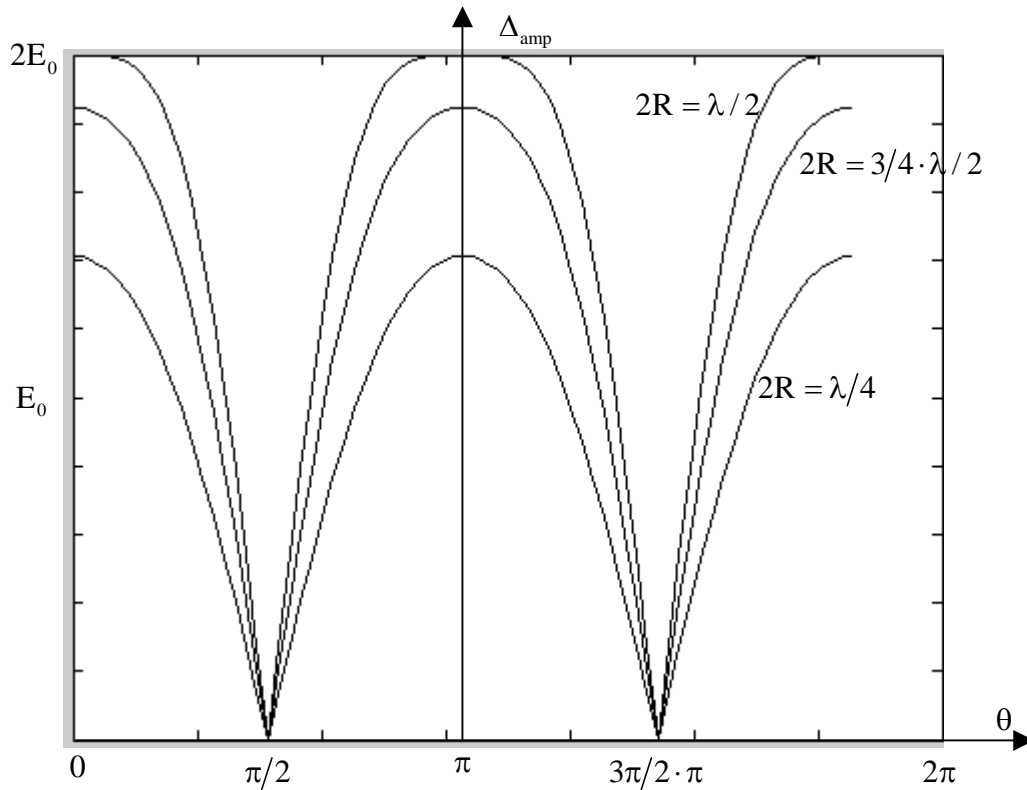
$$\Sigma_{\text{amp}} = (S_1(t) + S_2(t))_{\text{amp}} = \left| 2E_0 \sin \gamma \cdot \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cos \theta \right) \right| \quad (2.17)$$

Vanligvis ved bakkebasert peiling er  $\gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \gamma = 1$  hvilket gjør at likning (2.16) og likning (2.17) forenkles til :

$$\Delta_{\text{amp}} = (S_1(t) - S_2(t))_{\text{amp}} = 2E_0 \left| \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} R \cos \theta \right) \right| \quad (2.18)$$

$$\Sigma_{\text{amp}} = (S_1(t) + S_2(t))_{\text{amp}} = 2E_0 \left| \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} R \cos \theta \right) \right| \quad (2.19)$$

Som det fremgår av likning (2.18) er  $\Delta_{\text{amp}}$  en funksjon av  $\theta$  og kan benyttes for retningsbestemmelse. Denne funksjonen er skissert i figur 2-8. Denne funksjonen har maksimumsverdier ved  $\theta = 0$  og  $\theta = \pi$  og nullpunkter ved  $\theta = \frac{\pi}{2}$  og  $\theta = \frac{3\pi}{2}$ .



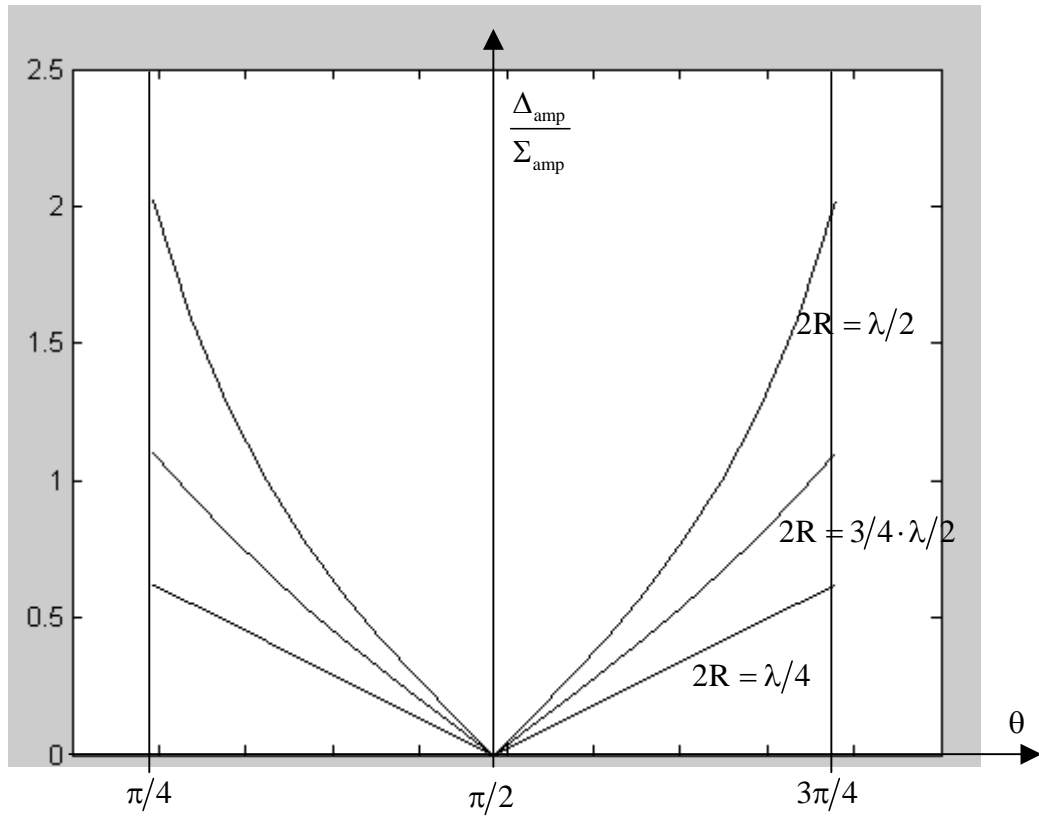
Figur 2-8 Funksjonen  $\Delta_{amp} = |S_1(\theta) - S_2(\theta)|$

Steilheten av funksjonen i likning (2.18) (figur 2-8) er avhengig av styrken i mottatt signal noe som er en ulempe dersom funksjonen skal benyttes for vinkelmåling. For å unngå dette dannes funksjonen  $\Delta_{amp}/\Sigma_{amp}$ .

$$\frac{\Delta_{amp}}{\Sigma_{amp}} = \frac{(S_1(t) - S_2(t))_{amp}}{(S_1(t) + S_2(t))_{amp}} = \frac{\left| \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} R \cos \theta\right) \right|}{\left| \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} R \cos \theta\right) \right|} = \left| \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} R \cos \theta \right| \quad (2.20)$$

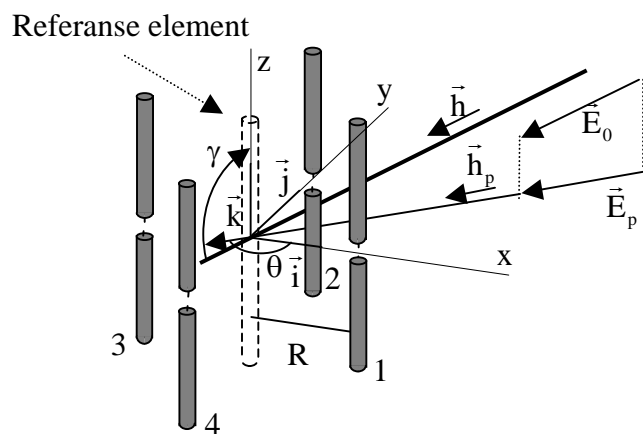
Funksjonen  $\Delta_{amp}/\Sigma_{amp}$  er noe bedre egnet til retningensbestemmelse. Funksjonen  $\Delta_{amp}/\Sigma_{amp}$  er skissert i figur 2-9. Imidlertid er funksjonen avhengig av bølgelengden  $\lambda$  (frekvensen). En måte å unngå denne svakheten på, er mekanisk å rotere arrayet til minimum mottatt signal.

Ved å dimensjonere slik at  $2R < \frac{\lambda}{2}$  unngås tvetydigheter. Av likning (2.20) fremgår det at funksjonen har sine maksimumsverdier ved  $\theta = 0$  og  $\pi$  og sine nullpunkter når  $\theta = \frac{\pi}{2}$  og  $\frac{3\pi}{2}$ . Retningen til en emitter kan bestemmes med en tvetydighet på  $180^\circ$ .



Figur 2-9  $\Delta_{amp}/\Sigma_{amp}$  som funksjon av  $\theta$

### 2.2.2 Watson-Watt peileren



Figur 2-10 Sirkulært antenne array med 4 elementer

Watson-Watt peileren er en variant av monopuls prinsippet hvor det benyttes et sirkulært array med 4 elementer.

Figur 2-10 viser et sirkulært array bestående av 4 elementer, nummerert fra 1 til 4. Antenneelementene er plassert på en sirkel med radius  $R$ . Definerer et koordinatsystem med origo i sirkelens sentrum hvor et imaginært element, element 0 er plassert.  $X$  aksen går igjennom element 1. Antenneelementene har posisjonene  $\vec{r}_1 = R\vec{i}$ ,  $\vec{r}_2 = R\vec{j}$ ,  $\vec{r}_3 = -R\vec{i}$  og  $\vec{r}_4 = -R\vec{j}$ .

Propagasjonsretningen for mottatt signal er  $\vec{h}$ . Vinkelen mellom  $\vec{h}$  og  $z$  aksen betegnes  $\gamma$ .

Retningen  $\vec{h}$  projisert ned i  $xy$  planet betegnes  $\vec{h}_p$ . Vinkelen mellom  $\vec{h}_p$  og  $x$  aksen betegnes  $\theta$ .

Tilsvarende som for to-elements arrayet ( likningene (2.10) og (2.11) ) er faseforsinkelsen i elementene 1, 2, 3 og 4 referert til element 0 lik:

$$\phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{h} \cdot \vec{r}_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \gamma \cdot (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) R \vec{i} = \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cos \theta \quad (2.21)$$

$$\phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{h} \cdot \vec{r}_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \gamma (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) R \vec{j} = \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \sin \theta \quad (2.22)$$

$$\phi_3 = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{h} \cdot \vec{r}_3 = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \gamma (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) R (-\vec{i}) = (-) \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cos \theta \quad (2.23)$$

$$\phi_4 = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{h} \cdot \vec{r}_4 = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \gamma (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) R (-\vec{j}) = (-) \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \sin \theta \quad (2.24)$$

Tilsvarende som for to-elements array er mottatt signalnivå på antenneelementene skrevet på kompleks form følgende:

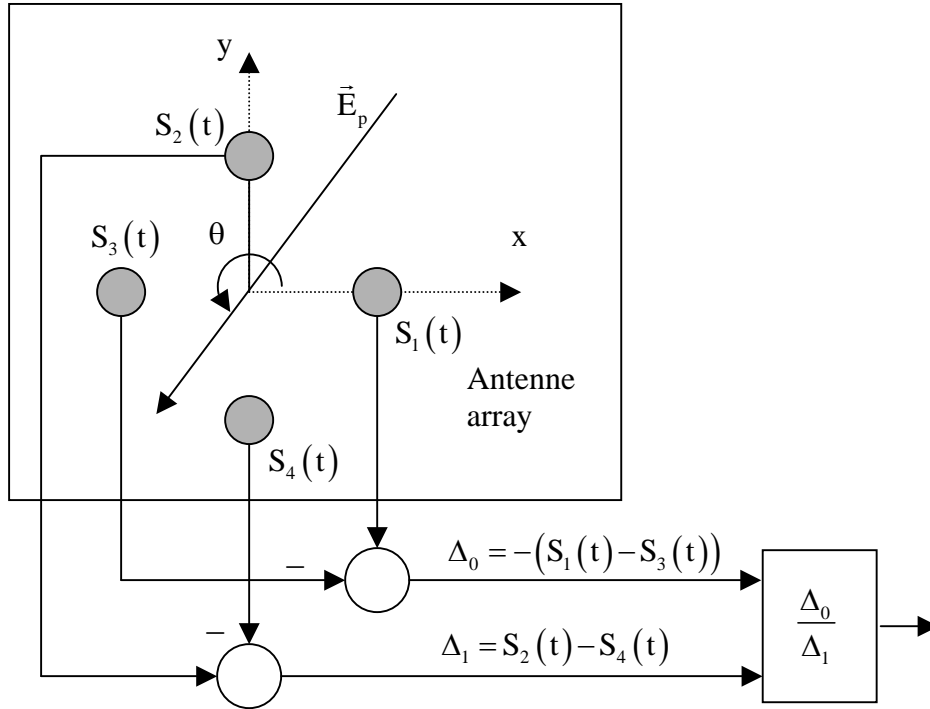
$$S_1(t) = E_0 \sin \gamma e^{j\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} \vec{r}_1 \vec{h}} = E_0 \sin \gamma e^{j\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cos \theta} \quad (2.25)$$

$$S_2(y) = E_0 \sin \gamma e^{j\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} \vec{r}_2 \vec{h}} = E_0 \sin \gamma e^{j\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \sin \theta} \quad (2.26)$$

$$S_3(t) = E_0 \sin \gamma e^{j\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} \vec{r}_3 \vec{h}} = E_0 \sin \gamma e^{j\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cos \theta} \quad (2.27)$$

$$S_4 = E_0 \sin \gamma e^{j\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} \vec{r}_4 \vec{h}} = E_0 \sin \gamma e^{j\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \sin \theta} \quad (2.28)$$

I Watson-Watt peileren subtraheres signalet mottatt på to motstående antenneelementer hvoretter man dividerer den ene differansen med den andre. Watson-Watt prinsippet er illustrert i Figur 2-11.



Figur 2-11 Prinsippet for Watson-Watt peileren

Mottatt signal på arrayets antenneelementer  $S_1(t)$ ,  $S_2(t)$ ,  $S_3(t)$ , og  $S_4(t)$  er gitt i likningene (2.25), (2.26), (2.27) og (2.28).

$$\begin{aligned} \Delta_0 = S_1(t) - S_3(t) &= E_p e^{j\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} \bar{r}_1 \cdot \bar{h}} - E_p e^{j\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} \bar{r}_3 \cdot \bar{h}} = E_p e^{j\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cos \theta} - E_p e^{j\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cos \theta} = \\ E_p 2j e^{j\omega t} &\left( \frac{e^{j \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cos \theta} - e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cos \theta}}{2j} \right) = 2j E_p e^{j\omega t} \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cos \theta \right) \end{aligned} \quad (2.29)$$

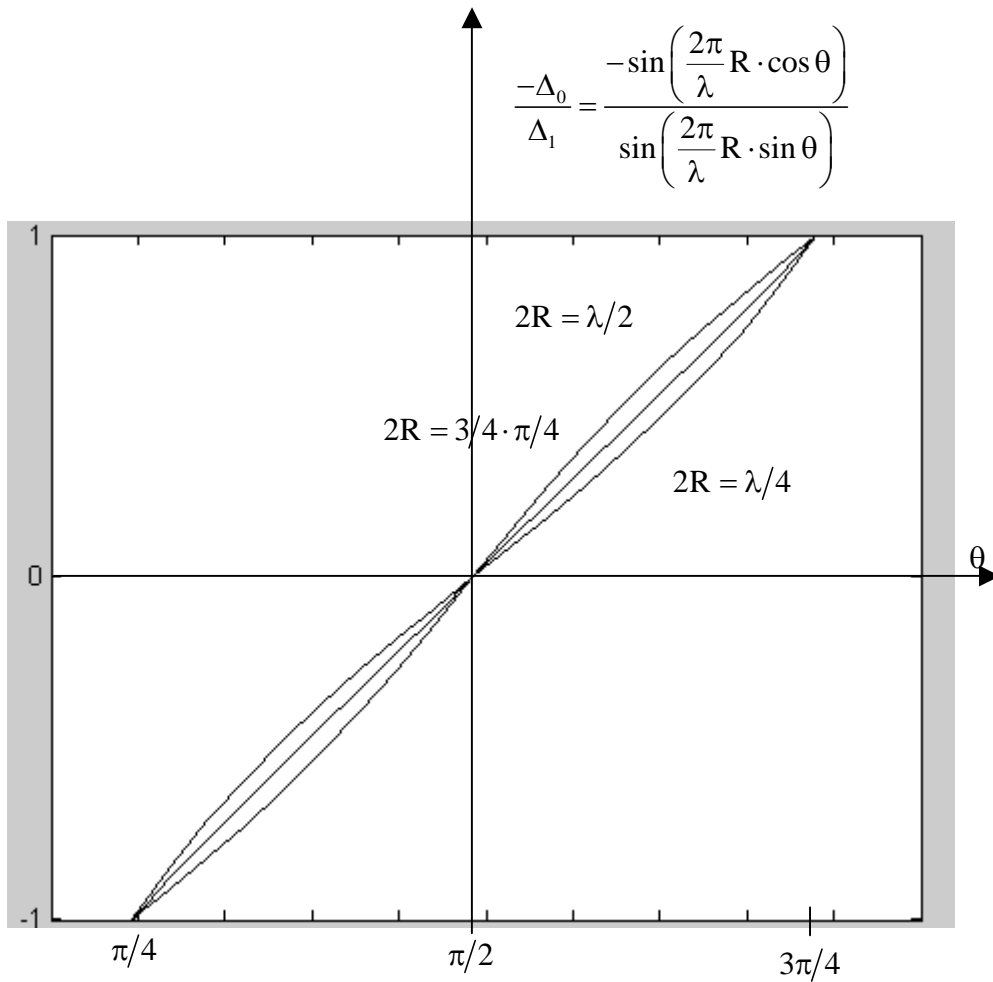
$$\begin{aligned} \Delta_1 = S_2(t) - S_4(t) &= E_p e^{j\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} \bar{r}_2 \cdot \bar{h}} - E_p e^{j\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} \bar{r}_4 \cdot \bar{h}} = E_p e^{j\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \sin \theta} - E_p e^{j\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \sin \theta} = \\ E_p 2j e^{j\omega t} &\left( \frac{e^{j \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \sin \theta} - e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \sin \theta}}{2j} \right) = 2j E_p e^{j\omega t} \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \sin \theta \right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_1} = \frac{-\sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cos \theta \right)}{\sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \sin \theta \right)} \quad (2.31)$$

Vanligvis er ved bakkebasert peiling  $\gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \gamma = 1$ , hvilket gjør at likning (2.31) forenkles

til:

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_1} = \frac{-\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} R \cos \theta\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} R \sin \theta\right)} \approx -\cot g\left(\frac{2\pi}{\lambda} R \cos \theta\right) \quad (2.32)$$



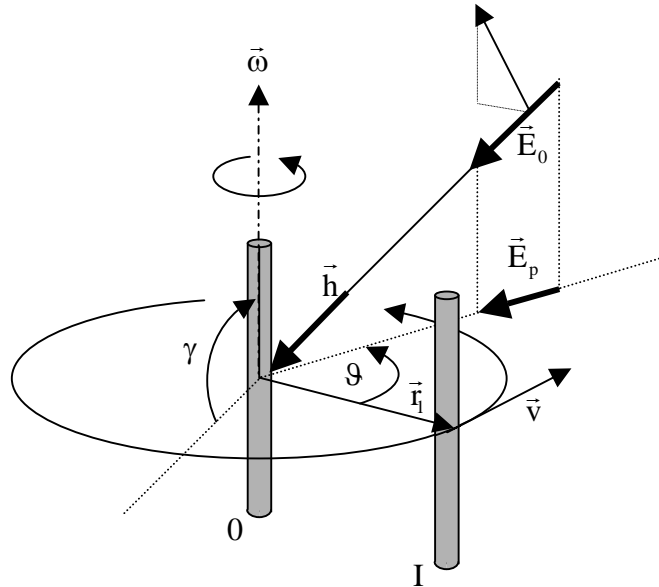
Figur 2-12 Utgangssignalet  $\frac{-\Delta_0}{\Delta_1}$  som funksjon av  $\theta$

Likning (2.32) er skissert i figur 2-12. Som det fremgår av figuren er utgangssignalet som funksjon av retning, relativt uavhengig av frekvensen.

### 2.3 Dopplerpeileren

Doppler peileren hører til de tradisjonell peileprinsippene. Prinsippet er vist i figur 2-13. Dopplerpeileren består av 2 antenneelementer, et referanseelement som betegnes element 0 og

element I. Element I roterer om referanseelementet med vinkelhastigheten  $\vec{\omega}$ . I signalet som mottas i element I oppstår det på grunn av rotasjonen et dopplershift som kan måles. Dopplershiftet er null når antenneelement I's posisjonsvektor  $\vec{r}_I$  faller sammen med peilelinjen. ( $\vartheta = 0$  eller  $\vartheta = \pi$ ).



Figur 2-13 Prinsippet for dopplerpeiler

Fra figur 2-13 fremgår det at element I's hastighetskomponent i retning emitter er:

$$v_e = |\vec{\omega} \times \vec{r}_I| \sin \vartheta \quad (2.33)$$

$v_e$  er antenneelement I's hastighetskomponent i retning emitter.

$\vec{\omega}$  er antennesystemets vinkelhastighet.

$\vec{r}_I$  er antenneelement I's posisjon.

$\vartheta$  er vinkel mellom element I's posisjon og retning til emitteren.

Dopplershiftet i signalet mottatt i antenneelement I er ( ref appendiks A.2 likning A.1 ):

$$f_d = \hat{f} - f = \frac{v_e}{\lambda} = \frac{|\vec{\omega} \times \vec{r}_I|}{\lambda} \sin \vartheta = f_{\text{dmaks}} \sin \vartheta \quad (2.34)$$

$$f_{\text{dmaks}} = \frac{\omega r_I}{\lambda} = \frac{f}{c} \omega r_I \quad (2.35)$$

$\lambda$  er signalets bølgelengde.

$f$  er signalets frekvens.

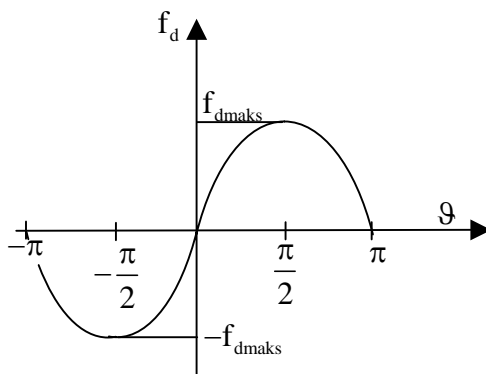
$\hat{f}$  er observert frekvens i antenneelement I.

$f_d$  er dopplershiftet.

$f_{d\text{maks}}$  er maksimalt dopplershift.

Fra likning (2.34) fremgår det at dopplershiftet  $f_d = 0$  når antenneelementet befinner seg på peilelinjen. Dopplershiftet  $f_d > 0$  når antenneelementet har en hastighetskomponent i retning mot emitteren og  $f_d < 0$  når elementet har en hastighetskomponent i retning fra emitteren. Figur 2-14 viser hvorledes dopplershiftet varierer som funksjon av vinkelen mellom retningen mot peileren (Line of Position) og antenne elementets posisjonsvektor  $\vec{r}_1$  (vinkel  $\vartheta$ ).

Av likning (2.35) fremgår det at følsomheten er størst ved høye frekvenser. Også omdreiningstastigheten  $\omega$  og avstanden mellom antennene påvirker  $f_{d\text{maks}}$ . Dopplerpeileren brukes mest ved høye frekvenser (radarfrekvenser).



Figur 2-14 Dopplershift som funksjon av vinkel  $\vartheta$  (vinkelen mellom retning til emitter og roterende antenneelements posisjonsvektor).

### 3 METODER BASERT PÅ MÅLING AV FASEFORSKJELL ELLER TIDSDIFFERANSE

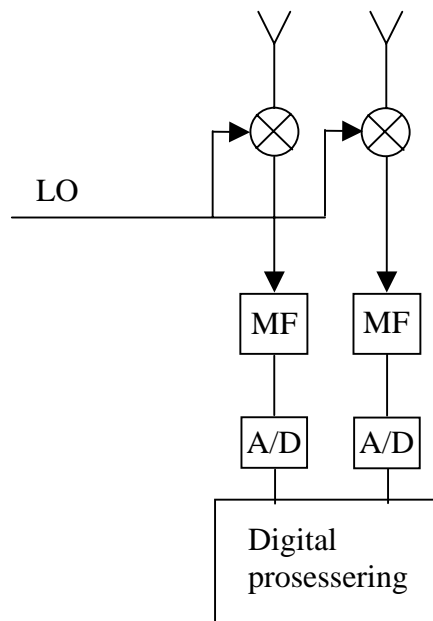
Bestemmelse av retning på grunnlag av fasemåling er egentlig en tidsmåling. Ved fasemåling måles faseforskjellen  $\Delta\varphi$  mellom to utgaver av et signal på to forskjellige antenneelementer. Et signal kan skrives på den komplekse formen  $S(t) = A(t)e^{j\omega_0 t}$  hvor signalets periode er  $T = 2\pi/\omega$ . En fasemåling er en måling av en tidsdifferens  $\Delta T$  som definerer faseforskjellen  $\Delta\varphi = \Delta T/T$ .

Peileteknikker basert på måling av tidsdifferanse kalles TDOA (Time Difference of Arrival). Ved disse teknikkene måles tidsdifferansen  $\Delta t$  mellom ankomsten av signalet i to antenneelementer.



Ved introduksjonen av mikroprosessen (8 bits mikroprosessor) og raske og effektive analog til digitalomformere ble det mulig å måle faseforskjeller og tidsforskjeller mellom signaler på en direkte måte uten å gå veien om amplitudemåling. Dette førte til bedre og mer nøyaktige peilemetoder. Peilere som benytter mikroprosessen og moderne digitalteknikk ble vanlige på slutten av åttitallet. Denne type peilere karakteriseres her som annen generasjons peilere.

### 3.1 Peilere basert på direkte fasemåling



Figur 3-1 Hovedkomponentene i mikroprosessorstyrt peiler

Figur 3-1 skisserer hovedkomponentene i en mikroprosessorstyrt peiler. Signalet fra et antennearray bestående av 2 elementer mikses ned til en passende mellomfrekvens. Utgangen av denne mikseprosessen samples og omdannes til diskrete signaler som prosesseres digitalt. En av utfordringene ved konstruksjon av slike peilere, er å lage to mottakerkjeder som er lik over frekvensområdet hvor peileren skal brukes. For å omgå denne vanskeligheten, benyttes det i noen peilere kun en mottakerkjede hvor antenneelementene koples til mottakerkjeden på tidsmultiplexet basis. Analog til digitalomformerens dynamikk og hurtighet er også en begrensende faktor i slike peilere.

Ved at signalene samples og omformes til tallsekvenser som prosesseres i en mikroprosessor måles differensen i fasevinkel  $\Delta\varphi$  mellom signalene på en relativt direkte måte. De to mest kjente måtene for å måle/beregne fasedifferansen  $\Delta\varphi$  er ved direkte måling av faseforskjellen i tidsplanet (finne nullgjennomgangene ved hjelp av interpolasjon) eller å finne fasedifferansen

ved hjelp av digital Fouriertransformasjon (DFT).

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (3.1)$$

Fra likningene (2.10), (2.11) og (3.1) følger :

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cos \theta - \left( -\frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cos \theta \right) = \frac{2\pi}{\lambda} 2R \sin \gamma \cos \theta \quad (3.2)$$

I likning (3.2) er  $-1 < \cos \theta < 1$  og for å oppnå entydighet ved vinkelmåling må  $-\pi < \Delta\varphi < \pi$ . Følgelig må følgende betingelse være oppfylt.

$$\pi > \frac{2\pi}{\lambda} 2R \sin \gamma$$

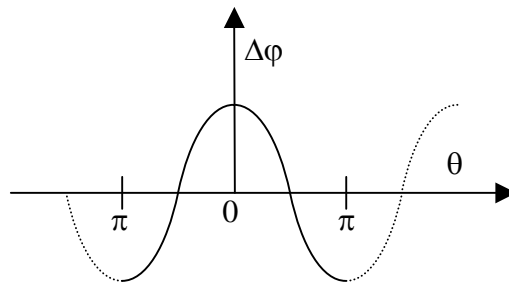
$$2R \sin \gamma < \frac{\lambda}{2} \quad (\text{Hvor } 2R \text{ er avstanden mellom antennene.}) \quad (3.3)$$

Ved bakkebasert peiling kan man vanligvis betrakte  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  og likning (3.2) forenkles til:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} 2R \cos \theta \quad (3.4)$$

Vanligvis finnes vinkelen  $\theta$  fra likning (3.4) ved tabelloppslag.

Ofte gjøres det et antall målinger av  $\Delta\varphi$  hvor hver måling danner elementer i en vektor. Bestemmelse av  $\theta$  ved hjelp av tabelloppslag hvor inngangsverdien for tabellen er en vektor, kalles ofte for "correlative interferometri" (8). Ved slike teknikker kan man i tabellen legge inn korreksjoner for ufullkommenheter i utstyret.



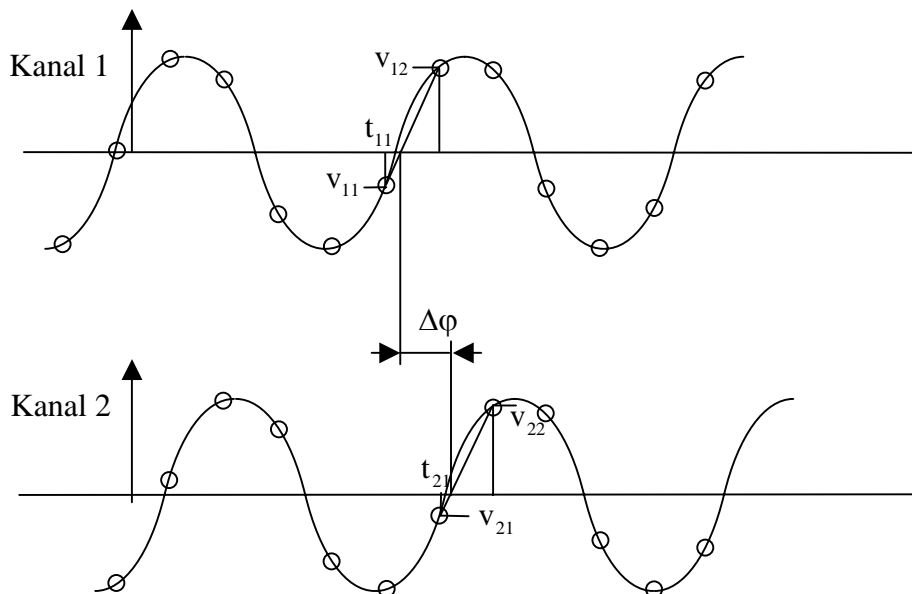
Figur 3-2 Faseforskjell  $\Delta\varphi$  som funksjon  $\theta$

Funksjonen  $\Delta\varphi(\theta)$  likning (3.4) er skissert i figur 3-2. Fra figur 3-2 fremgår det at funksjonens steilhet, og dermed peilefølsomheten er størst når  $\theta = \pm\pi/2$ . Det vil si at størst nøyaktighet oppnås når  $\theta \approx \pm\pi/2$ .

Selv om peilinger ofte er basert på måling av en fasedifferansen  $\Delta\varphi$  mellom et signal i 2 forskjellige antenneelementer benyttes det vanligvis et fire elementers array. Man utfører 2 ulike peilinger ved hjelp av elementpar bestående av to motstående elementer. Som peileresultat velges den peiling hvor  $|\theta|$  er nærmest  $\pi/2$ .

### 3.1.1 Direkte fasemåling i tidsplanet

Når signaler foreligger på digital form som tall kan fasedifferansen  $\Delta\varphi$  mellom signaler detekteres i programvare.



Figur 3-3 Illustrasjon av estimering av fasedifferansen mellom to signaler.

En metode for deteksjon av  $\Delta\varphi$  er vist i figur 3-3. Man utfører et estimat av signalenes nullgjennomganger basert på tidspunktene når de samplede verdiene skifter fortegn.

De to signalkanalene samples på samme tidspunkt. Signalets periode er  $T$ . Tiden mellom hvert sampel er  $T_s$ , hvor  $T_s < T$ . Betrakter to etter hverandre følgende sampler med motsatt fortegn. Disse betegnes henholdsvis som  $v_{11}$  og  $v_{12}$  i kanal 1 og som  $v_{21}$  og  $v_{22}$  i kanal 2.

#### Kanal 1:

Samplingstidspunktet for signalet  $v_{11}$  (se figur 3-3) er  $t_{11}$ .

Samplingtidspunktet for  $v_{12}$  (første sampel etter at polariteten skifter) er  $t_{11} + T_s$ .  
Tidspunkt for nullgjennomgang er  $t_{11} + \Delta t_1$ .

Fra figur 3-3 følger.

$$\frac{|v_{11}|}{\Delta t_1} = \frac{|v_{12}|}{T_s - \Delta t_1}$$

$$\Delta t_1 = \frac{|v_{11}|}{|v_{12}| + |v_{11}|} T_s \quad (3.5)$$

Kanal 2:

Samplingtidspunktet for signalet  $v_{21}$  (se figur 3-3t) er  $t_{21}$ .

Samplingtidspunktet for  $v_{22}$  (første sampel etter at polariteten skifter) er  $t_{21} + T_s$ .

Estimert tidspunkt for nullgjennomgang er  $t_{21} + \Delta t_2$ .

Fra figur 3-3 følger.

$$\frac{|v_{21}|}{\Delta t_2} = \frac{|v_{22}|}{T_s - \Delta t_2}$$

$$\Delta t_2 = \frac{|v_{21}|}{|v_{22}| + |v_{21}|} T_s \quad (3.6)$$

Fra figur 3-3 og likning (3.5) og (3.6) følger at tidsforskyvningen  $\Delta t$  mellom signalene er:

$$\Delta t = (t_{21} + \Delta t_2) - (t_{11} + \Delta t_1) = t_{21} - t_{11} + \frac{|v_{21}|}{|v_{22}| + |v_{21}|} - \frac{|v_{11}|}{|v_{12}| + |v_{11}|} \quad (3.7)$$

Faseforskjellen mellom signalene er:

$$\Delta\phi = \frac{\Delta t}{T} \quad (3.8)$$

Likning (3.8) kombinert med likning (3.4) gir:

$$\Delta\phi = \frac{\Delta t}{T} = \frac{2\pi}{\lambda} 2R \cos \theta = \frac{2\pi}{cT} 2R \cos \theta$$

$$\Delta t = \frac{2\pi}{c} 2R \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{c\Delta t}{2\pi \cdot 2R} \quad (3.9)$$

Fra likning (3.9) fremgår det at  $\theta$  kan estimeres direkte uten å gå veien om  $\Delta\varphi$ .

### 3.1.2 Beregning av differanse i fasevinkel ved hjelp av DFT

En annen metode for å finne faseforskjellen  $\Delta\varphi$  mellom signal mottatt på to antenneelementer er å benytte den digitale Fourier-transformen (DFT). Fast Fourier-transform FFT er en betegnelse på en gruppe forskjellige algoritmer som beregner den digitale Fourier-transformen DFT. Forskjellige FFT algoritmer benytter ulike triks for å utføre DFT på en mest mulig effektiv metode.

I appendiks B er det gitt en kortfattet beskrivelse av DFT. Ved digital Fourier-transformering deles frekvensspekteret opp i frekvensbinner hvor signalet innenfor en binne representeres med et komplekst tall  $F(k)$  (likning B2).

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT) e^{-jk \frac{2\pi}{NT} nT} = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT) e^{-jk \frac{\omega_0}{N} nT} \quad (3.10)$$

Ved DFT kan man diskriminere mellom samtidige signaler dersom frekvensdifferansen mellom signalene er større enn binnebredden. Et signal i binne  $k$  blir representert av et komplekst tall  $F(k)$ , likning (3.10).

Antar at det mottas et signal i binne  $k$ . I mottakerkjedene (figur 3-1) vil signalene  $F(k)_1$  og  $F(k)_2$  bli detektert i henholdsvis kanal 1 og kanal 2.

$$F_1(k) = a_1 + jb_1$$

$$F_2(k) = a_2 + jb_2$$

$$\varphi_1 = \text{Arctg} \frac{b_1}{a_1}$$

$$\varphi_2 = \text{Arctg} \frac{b_2}{a_2}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \text{Arctg} \frac{b_1}{a_1} - \text{Arctg} \frac{b_2}{a_2} \quad (3.11)$$

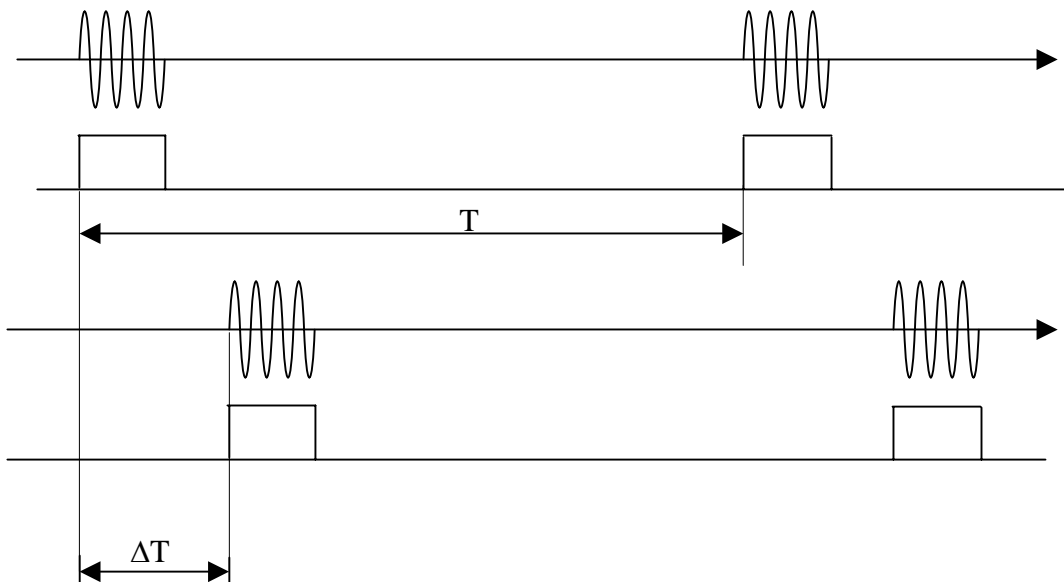
For å beregne  $\theta$  kombineres likning (3.11) med likning (3.4).

$$\theta = \text{Arc cos} \left( \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \cdot \frac{\lambda}{2R} \right) \quad (3.12)$$

### 3.2 TDOA (Time Difference of Arrival)

Metoden TDOA (Time Difference of Arrival) er å måle tidsdifferansen  $\Delta t$  mellom ankomster av signalet i forskjellige antenneelementer og på dette grunnlag beregne retningen til emitteren.

TDOA er en populær peilemetode ved peiling av pulsradar. Forutsetningen for at TDOA skal være mulig er at signalet har et definert og lett gjenkjennbart karakteristika som for eksempel pulsene i et signal fra en pulsradar. Starten av en radarpuls er et lett gjenkjennbart karakteristika.



Figur 3-4 Illustrasjon av TDOA prinsippet.

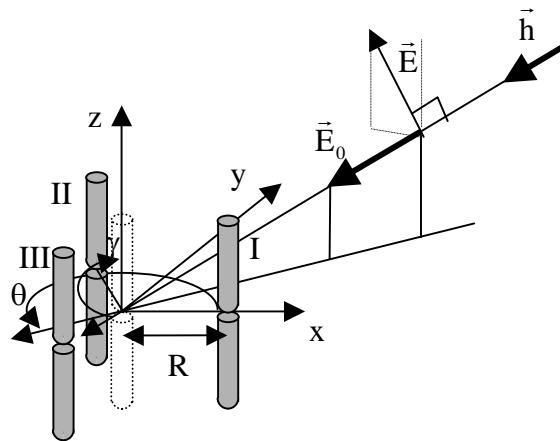
Forskjellen mellom fasemåling og TDOA er at ved fasemåling måles bæreølgenes fase, mens ved TDOA måles tidsforskyvningen av karakteristika i signalet. Ved TDOA gjøres målingen av  $\Delta T$  vanligvis etter at signalet er demodulert, dette er illustrert i figur 3-4.

Ved TDOA er vanligvis avstanden  $D$  mellom antenneelementene vesentlig større enn  $\frac{\lambda}{2}$ . Desto større avstanden  $D$  mellom antenneelementene er, desto større nøyaktighet kan oppnås, mens avstanden mellom elementene ved fasemåling vanligvis er mindre enn  $\frac{\lambda}{2}$ . Teknikken TDOA er populær ved peiling fra fly da man plasserer et antenneelement på hver vingespiss.

Det er kjent at det eksperimenteres med TDOA for peiling av radiokommunikasjon. Problemet er å finne lett gjenkjennbare karakteristika i et kommunikasjonssignal. En metode er å krysskorrelere signalet fra to antenneelementer i et array og på den måten finne forsinkelsen mellom signalene.

### 3.3 Retningsbestemmelse i 3 dimensjoner

For å kunne bestemme retningen til en emitter i tre dimensjoner må det benyttes et array bestående av minst 3 elementer hvor elementene ikke ligger på en rett linje. Nedenfor er det vist et eksempel på hvordan dette kan gjøres.



Figur 3-5 Sirkulært antenne array med 3 elementer for peiling i 3 dimensjoner

Figur 3-5 viser et sirkulært array med 3 elementer. Definerer et koordinatsystem med origo i arrayets sentrum og x-aksen igjennom element I. Antenne elementenes avstand fra origo er R. Elementenes posisjon er  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  og  $\vec{r}_3$ . hvor.

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= R\vec{i} \\ \vec{r}_2 &= R \cos \frac{2\pi}{3} \vec{i} + R \sin \frac{2\pi}{3} \vec{j} \\ \vec{r}_3 &= R \cos \frac{4\pi}{3} \vec{i} + R \sin \frac{4\pi}{3} \vec{j}\end{aligned}$$

Signalets propagasjonsretning er:

$$\vec{h} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k} \quad (3.13)$$

Dersom man kan måle fasevinklene  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  og  $\varphi_3$  mellom signalene på elementene og det imaginære referanseelement i origo, kan retningen  $\vec{h}$  bestemmes ved at vinklene  $\theta$  og  $\gamma$  bestemmes.

Ved tilsvarende resonnement som ved utledningen av likningene (2.21), (2.22), (2.23) og (2.24) følger at faseforskyvningene  $\varphi_i$  for signalene referert til et imaginært element i origo er:

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{h} \cdot \vec{r}_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \gamma \cdot (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \cdot \vec{R} \vec{i} = \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cos \theta \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{2\pi}{\lambda} \vec{h} \cdot \vec{r}_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \gamma \cdot (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \cdot \vec{R} \left( \cos \frac{2\pi}{3} \vec{i} + \sin \frac{2\pi}{3} \vec{j} \right) = \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cos \theta \cos \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \sin \theta \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \cdot R \sin \gamma \cos \theta \cdot \frac{-1}{2} + \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \sin \theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{\lambda} R \sin \gamma (-\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \frac{2\pi}{\lambda} \vec{h} \cdot \vec{r}_3 = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \gamma \cdot (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \cdot \vec{R} \left( \cos \frac{4\pi}{3} \vec{i} + \sin \frac{4\pi}{3} \vec{j} \right) = \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cos \theta \cos \frac{4\pi}{3} \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \cos \theta \frac{-1}{2} + \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \sin \theta \frac{-\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{\lambda} R \sin \gamma (-\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ved manipulering av likningene (3.14), (3.15) og (3.16) kan  $\theta$  og  $\gamma$  løses eksplisitt som følger:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{\varphi_2 + \varphi_3} &= \frac{\pi/\lambda \cdot R \sin \gamma (-\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta) - \pi/\lambda \cdot R \sin \gamma (-\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta)}{\pi/\lambda \cdot R \sin \gamma (-\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta) + \pi/\lambda \cdot R \sin \gamma (-\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta)} = \\ &= \frac{-\cos \theta + \sqrt{3} \cdot \sin \theta + \cos \theta + \sqrt{3} \cdot \sin \theta}{-\cos \theta + \sqrt{3} \cdot \sin \theta - \cos \theta - \sqrt{3} \cdot \sin \theta} = \frac{\sqrt{3} \sin \theta}{-\cos \theta} = -\sqrt{3} \cdot \text{tg} \theta \end{aligned}$$

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_3}{\varphi_2 + \varphi_3} = -\sqrt{3} \cdot \text{tg} \theta$$

$$\theta = \text{Arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{\varphi_2 + \varphi_3} \right) \quad (3.17)$$



$$\varphi_2 - \varphi_3 = \pi/\lambda \cdot R \sin \gamma (-\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta) - \pi/\lambda \cdot R \sin \gamma (-\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot R \sin \gamma \cdot \sqrt{3} \sin \theta$$

$$(\varphi_2 - \varphi_3)^2 = \left( \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \right)^2 3 \cdot \sin^2 \theta$$

$$\varphi_1^2 = \left( \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \right)^2 \cos^2 \theta$$

$$(\varphi_2 - \varphi_3)^2 + 3\varphi_1^2 = \left( \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \right)^2 3(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 3 \left( \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \gamma \right)^2$$

$$\sin^2 \gamma = \frac{\frac{(\varphi_2 - \varphi_3)^2}{3} + \varphi_1^2}{\left( \frac{2\pi}{\lambda} R \right)^2}$$

$$\sin \gamma = \frac{\lambda}{2\pi R} \sqrt{\varphi_1^2 + \frac{(\varphi_2 - \varphi_3)^2}{3}}$$

$$\gamma = \text{Arc sin} \left( \frac{\lambda}{2\pi R} \sqrt{\varphi_1^2 + \frac{(\varphi_2 - \varphi_3)^2}{3}} \right) \quad (3.18)$$

#### 4 PEILERE SOM UTNYTTER STØRRE ARRAYER

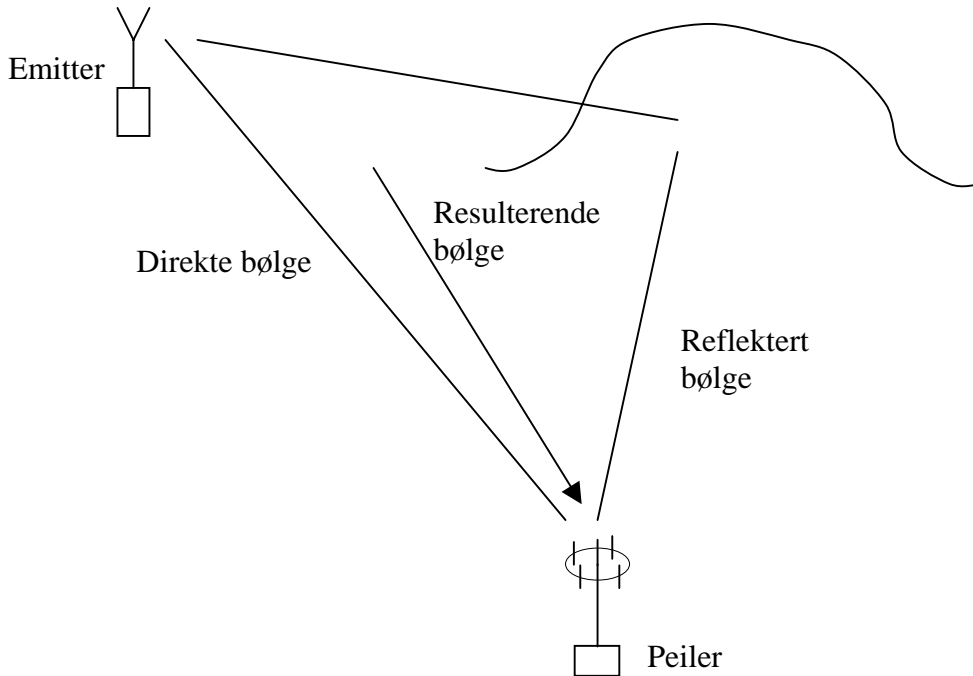
En radiomottaker er å betrakte som et filter som filtrerer ut den frekvensen man ønsker å motta, det vil si at en radiomottaker diskriminerer på frekvens. I de peileprinsippene som er beskrevet ovenfor skjer diskrimineringen mellom ulike emittere på grunnlag av frekvens på samme måte som i en konvensjonell radio.

I tette signalmiljøer med mange emittere stilles det strenge krav til peilerens evne til å diskriminere mellom emittere. I tette signalmiljøer vil en kunne bli forstyrret av interferens fra andre emittere, noe som gir systematiske feil og redusert peilenøyaktighet.

I kupert terreng oppstår det flerbanner. Ved flerbanner mottar man to eller flere signaler fra samme emitter, men fra forskjellige retninger. Disse signalene er forskjellige utgaver av samme signal og har derfor samme frekvens. Det er derfor ikke mulig å diskriminere mellom flerbanner på grunnlag av frekvensen. Flerbaner gir systematiske peilefeil.

Figur 4-1 illustrerer problemet med peiling i et miljø med flerbanner. Ved metoder hvor diskri-

mineringen skjer på grunnlag av frekvens, vil resulterende peile retning være bestemt av vektorsummen av alle innkommende bølger.



Figur 4-1 Peiling i miljøer med flerbaner



Figur 4-2 Eksempel på antennearray med 9 elementer (20MHz - 3GHz Rohde & Schwarz)

Det er etter hvert blitt utviklet peilemetoder som i tillegg til å diskriminere på frekvens også diskriminerer på retning, det vil si metoder som muliggjør samtidig peiling av flere emittere på

samme frekvens. Disse peilemetodene benytter et antennearray med mange elementer og svært regnekrevende algoritmer. Disse peilemetodene ble først tatt i bruk for akustiske og seismiske signaler. Etter hvert som kraftige mikroprosessorer og hurtige analog til digitalomformere har blitt utviklet er det etter hvert blitt mulig å ta i bruk slike algoritmer også for taktiske radiopeilere. Slike peilere karakteriseres her som tredje generasjons peilere. En ulempe ved disse peileteknikkene er at et antennearray bestående av mange elementer og tilsvarende parallelle identiske mottakskanaler er kostnadsdrivende.

#### 4.1 Romlig Fouriertransformasjon

Romlig Fouriertransformasjon er en metode som kan benyttes ved samtidig peiling av flere emittere på samme frekvens. Ulempen med dette prinsippet er at det kreves et array med urealistisk mange elementer for å oppnå en rimelig god oppløsning.

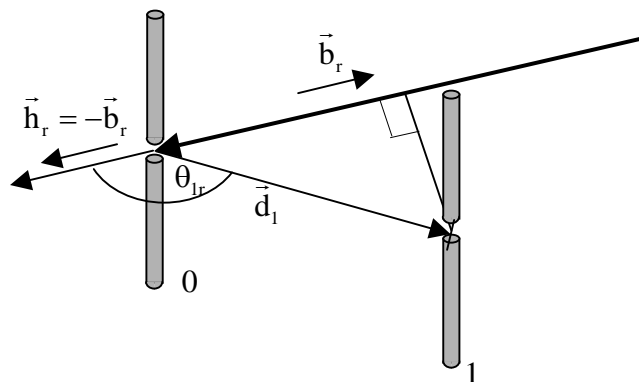
I Fourierintegralet, likning (4.1) for transformering fra tidsdomenet til frekvensdomenet er de frie variable  $t$  og  $\omega$  endimensjonale størrelser.

$$F(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.1)$$

I den romlige Fouriertransformasjonen erstatter man i Fourierintegralet tiden  $t$  med en vektor  $\vec{d}$  og vinkelfrekvensen  $\omega$  erstatter man med en vektor  $\vec{\kappa}$ . Fourierintegralet for den romlige Fouriertransformasjonen er vist i likning (4.2).

$$F(\vec{\kappa}) = \int_{\text{alle } \vec{d}} f(\vec{d}) e^{-j\vec{\kappa}\vec{d}} d\vec{d} \quad (4.2)$$

Vektoren  $\vec{d}$  betraktes som en vektor i rommet og  $\vec{\kappa}$  kan man tenke på som en slags romlig vinkelfrekvensvektor.



Figur 4-3 Array bestående av to elementer

Figur 4-3 viser et array bestående av to elementer. Et av elementene defineres som referanse-element og betegnes som element 0 mens det andre betegnes som element 1. Posisjonsvektoren  $\vec{d}_1$  betegner element 1's posisjon. Et signal som er transmittert av en emitter r har propagasjonsretningen  $\vec{h}_r$ . Retningen fra arrayet til emitter r betegnes  $\vec{b}_r$ , hvor  $\vec{b}_r = -\vec{h}_r$ .

Forsinkelsen av mottatt signal på element 1 referert til referanseelementet betegnes  $\tau_1$ .

$$\tau_1 = -\frac{|\vec{d}_1| \cos \theta}{c} = -\frac{\vec{d}_1 \cdot \vec{b}_r}{c} \quad (4.3)$$

$\tau_1$  er: Forsinkelsen i signalet i antenne element nr 1 referert til element 0.

$\vec{d}_1$  er: Antenne element nr. 1's posisjonsvektor

$\vec{b}_r$  er: Enhetsvektor som angir retning til emitter r.

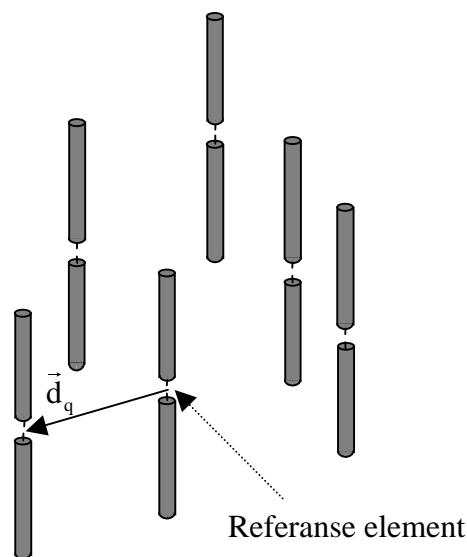
c er: Propagasjonsfarten.

$\theta_r$  er: Vinkelen mellom  $\vec{b}_r$  og  $\vec{d}_1$

Signalene mottatt på elementene 0 og 1 på kompleks form betegnes som henholdsvis  $x_0(t)$  og  $x_1(t)$ .

$$x_0(t) = Ae^{j\omega_r t} \quad (4.4)$$

$$x_1(t) = x_0(t - \tau_1) = x_0\left(t + \frac{\vec{d}_1 \cdot \vec{b}_r}{c}\right) = Ae^{j\omega_r \left(t + \frac{\vec{d}_1 \cdot \vec{b}_r}{c}\right)} = Ae^{j\omega_r t} e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \vec{d}_1 \cdot \vec{b}_r} = Ae^{j\omega_r t} e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta_r} \quad (4.5)$$



Figur 4-4 Eksempel på array med mange elementer

Et array kan bestå av mange elementer. Figur 4-4 viser et eksempel på et array som består av mange elementer

Antar et array bestående av  $Q$  elementer. Et element velges som referanseelement og betegnes som element 0. Definerer origo i et koordinatsystem i element 0.

Forsinkelsen i et signal fra emitter  $r$  i antenne element  $q$  referert til origo (antenne element 0) er:

$$\tau_q = -\frac{\vec{d}_q \cdot \vec{b}_r}{c} \quad (4.6)$$

$\tau_q$  er: Forsinkelsen i signalet i antenne element nr  $q$ .

$\vec{d}_q$  er: Antenne element nr.  $q$ 's posisjonsvektor.

$\vec{b}_r$  er: Enhetsvektor som angir retning til emitter  $r$ .

$c$  er: Propagasjonsfarten.

Definerer følgen  $\{x(\vec{d}_q)\}_{q=0}^{Q-1} = x(\vec{0}), x(\vec{d}_1), \dots, x(\vec{d}_q), \dots, x(\vec{d}_{Q-1})$  hvor elementene i følgen representerer signal mottatt på respektive antenneelement.

$$\{x(\vec{d}_q)\}_{q=0}^{Q-1} = Ae^{j\omega_r t_0}, Ae^{j\omega_r \left(t + \frac{\vec{b}_r \cdot \vec{d}_1}{c}\right)}, \dots, Ae^{j\omega_r \left(t + \frac{\vec{b}_r \cdot \vec{d}_q}{c}\right)}, \dots, Ae^{j\omega_r \left(t + \frac{\vec{b}_r \cdot \vec{d}_{(Q-1)}}{c}\right)} = Ae^{j\omega_r t} \left\{ e^{j\omega_r \frac{\vec{b}_r \cdot \vec{d}_q}{c}} \right\}_{q=0}^{Q-1} \quad (4.7)$$

Likning (4.7) kan betraktes som et samplet signal skrevet på følgende form:

$$x(\vec{d}) = Ae^{j\omega_r t} \sum_{q=0}^{Q-1} e^{j\omega_r \frac{\vec{b}_r \cdot \vec{d}}{c}} \delta(\vec{d} - \vec{d}_q) = Ae^{j\omega_r t} \sum_{q=0}^{Q-1} e^{j\frac{2\pi}{\lambda_r} \vec{b}_r \cdot \vec{d}_q} \delta(\vec{d} - \vec{d}_q) = Ae^{j\omega_r t} \sum_{q=0}^{Q-1} e^{j\vec{k}_r \cdot \vec{d}_q} \delta(\vec{d} - \vec{d}_q) \quad (4.8)$$

$\vec{d}$  er en kontinuerlig vektor i rommet.

$\vec{d}_q$  er element  $q$ 's posisjon .

$$\vec{k}_r = \frac{2\pi}{\lambda_r} \vec{b}_r .$$

$\lambda_r$  er signalets bølgelengde.

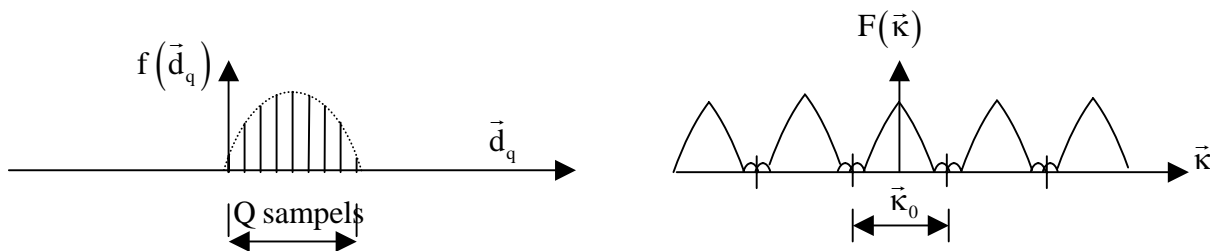
Den romlige Fouriertransformerte er gitt av likning (4.2). Den romlige Fouriertransformerte av likning (4.8) er:

$$X(\vec{\kappa}) = \int_{\text{alle } \vec{d}} A e^{j\omega_r t} \sum_{q=0}^{Q-1} e^{j\vec{\kappa}_r \cdot \vec{d}} \delta(\vec{d} - \vec{d}_q) e^{-j\vec{\kappa} \cdot \vec{d}} d\vec{d} = A e^{j\omega_r t} \sum_{q=0}^{Q-1} e^{j\vec{\kappa}_r \cdot \vec{d}_q - j\vec{\kappa} \cdot \vec{d}_q} = A e^{j\omega_r t} \sum_{q=0}^{Q-1} e^{j(\vec{\kappa}_r - \vec{\kappa}) \cdot \vec{d}_q} \quad (4.9)$$

Da  $\vec{\kappa}_r = \frac{2\pi}{\lambda_r} \vec{b}_r$  kan likning (4.9) også uttrykkes som en funksjon av  $\vec{b}$ , hvor  $\vec{b}$  er en enhetsvektor som betegner en retning i rommet.

$$X(\vec{b}) = A e^{j\omega_r t} \sum_{q=0}^{Q-1} e^{j(\vec{\kappa}_r - \vec{\kappa}) \cdot \vec{d}_q} = A e^{j\omega_r t} \sum_{q=0}^{Q-1} \left( e^{j\vec{\kappa}_r \cdot \vec{d}_q} \right) e^{-j\vec{\kappa} \cdot \vec{d}_q} = A e^{j\omega_r t} \sum_{q=0}^{Q-1} \left( e^{j \frac{2\pi}{\lambda_r} \vec{b}_r \cdot \vec{d}_q} \right) e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_r} \vec{d}_q \cdot \vec{b}} \quad (4.10)$$

Likning (4.8) representerer et romlig samplet signal hvor likning (4.10) representerer Fouriertransformasjonen av dette signalet. Som analogi til den endimensjonale Fouriertransformasjon er transformasjonen av likning (4.8) til (4.10) illustrert i figur 4.5.



Figur 4-5 Illustrasjon av romlig fouriertransformasjon (likning (4.9) i analogi med den fouriertransformerte av et pulstog (samplet funksjon med endelig varighet)

Som det fremgår av likning (4.10) er formen på loben av  $X(\vec{b})$  avhengig av hvorledes  $\vec{d}_q/\lambda_r$  varierer det vil si arrayets geometriske konfigurasjon.

Dersom  $\vec{b} = \vec{b}_r$  omdannes likning (4.10) til:

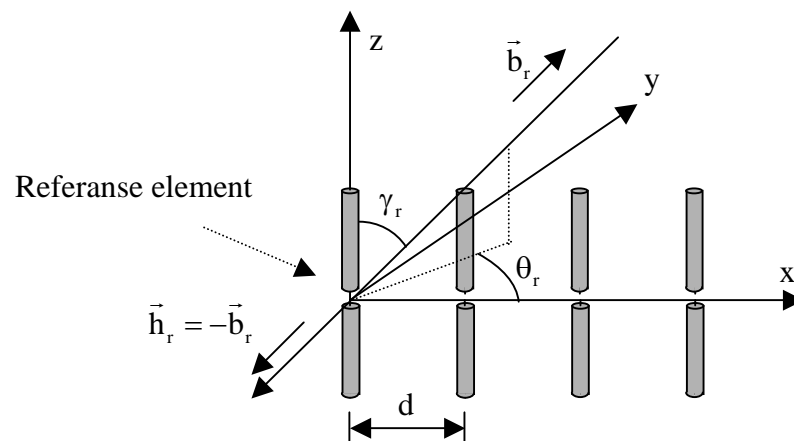
$$X(\vec{b}_r) = A e^{j\omega_r t} \sum_{q=0}^{Q-1} \left( e^{j \frac{2\pi}{\lambda_r} \vec{b}_r \cdot \vec{d}_q} \right) e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_r} \vec{d}_q \cdot \vec{b}_r} = A e^{j\omega_r t} \sum_{q=0}^{Q-1} 1 = A e^{j\omega_r t} \cdot Q \quad (4.11)$$

Fra likning (4.11) fremgår det at et signal som kommer fra retningen  $\vec{b}_r$  summeres koherent i alle antenneelementene. Ved koherent summasjon forsterkes signalet amplitudemessig med faktoren  $Q$  og effektmessig med faktoren  $Q^2$ . Imidlertid får man støy fra  $Q$  kanaler. Dersom støy-

en er ukorrelert vil støyen øke med faktoren  $Q$ . Resultatet er at signal-støyforholdet forbedres med faktoren  $Q$ .

Selv om det er visse praktiske begrensninger så kan man i iallfall i prinsippet konstruere et antennearray bestående av så mange elementer som man bare vil, og på den måten oppnå en så god følsomhet som man bare vil. Ved å utnytte et antennearray kan man lage mottakere med svært god følsomhet. Slike mottakere kan i tillegg til å bestemme retning også være svært vel-egnet til å detektere signaler fra svake emittere. Man kan sammenlikne prinsippet for antenne array med prinsippet for DSSS (Direct Sequence Spread Spectrum) radioer. Prinsippet for å heve signalet opp fra støyen er i begge tilfeller korrelasjon. Ved DSSS korrelerer man i tid mens man i et antenne array korrelerer i rom.

#### 4.1.1 Romlig Fouriertransformasjon med lineært array



Figur 4-6 Lineært array

Et array bestående av et antall elementer plassert på en rett linje med lik avstand kalles et lineært array. Figur 4-6 viser et lineært array hvor avstanden mellom hvert element er  $d$ . Et av ende elementene defineres som referanseelement og betegnes element 0. Definerer et koordinatsystem med origo i referanseelementet og  $x$  akse langs linjen som elementene er plassert på.

Fra figur 4-6 fremgår det at for et lineært array er:

$$\vec{d}_q = qd \vec{i} \quad (4.12)$$

Likning (4.12) innsatt i likning (4.10) gir

$$\begin{aligned}
X(\vec{b}) &= Ae^{j\omega_r t} \sum_{q=0}^{Q-1} e^{j(\vec{k}_r - \vec{k}) \cdot \vec{d}_q} = Ae^{j\omega_r t} \sum_{q=0}^{Q-1} e^{j(\vec{k}_r - \vec{k}) \cdot q \vec{d}} = Ae^{j\omega_r t} \frac{e^{jQd(\vec{k}_r - \vec{k}) \cdot \vec{i}} - 1}{e^{jd(\vec{k}_r - \vec{k}) \cdot \vec{i}} - 1} = \\
& Ae^{j\omega_r t} \frac{e^{\frac{jQd(\vec{k}_r - \vec{k}) \cdot \vec{i}}{2}} \left( e^{\frac{jQd(\vec{k}_r - \vec{k}) \cdot \vec{i}}{2}} - e^{-\frac{jQd(\vec{k}_r - \vec{k}) \cdot \vec{i}}{2}} \right)}{e^{\frac{jd(\vec{k}_r - \vec{k}) \cdot \vec{i}}{2}} \left( e^{\frac{jd(\vec{k}_r - \vec{k}) \cdot \vec{i}}{2}} - e^{-\frac{jd(\vec{k}_r - \vec{k}) \cdot \vec{i}}{2}} \right)} = Ae^{j\omega_r t} \cdot e^{\frac{jQ-1}{2} d(\vec{k}_r - \vec{k}) \cdot \vec{i}} \cdot \frac{\sin Q \frac{d(\vec{k}_r - \vec{k}) \cdot \vec{i}}{2}}{\sin \frac{d(\vec{k}_r - \vec{k}) \cdot \vec{i}}{2}} = \\
& Ae^{j\omega_r t} \cdot e^{\frac{jQ-1}{2} \frac{2\pi}{\lambda_r} d(\vec{h}_r - \vec{h}) \cdot \vec{i}} \cdot \frac{\sin Q \cdot \frac{2\pi}{\lambda_r} \cdot \frac{d(\vec{b}_r - \vec{b}) \cdot \vec{i}}{2}}{\sin \frac{2\pi}{\lambda_r} \cdot \frac{d(\vec{b}_r - \vec{b}) \cdot \vec{i}}{2}} = \\
X(\vec{b}) &= Ae^{j\omega_r t} \cdot e^{\frac{jQ-1}{2} \frac{2\pi}{\lambda_r} d(\vec{h}_r - \vec{h}) \cdot \vec{i}} \cdot \frac{\sin Q \cdot \frac{2\pi}{\lambda_r} \cdot \frac{d(\vec{b}_r - \vec{b}) \cdot \vec{i}}{2}}{\sin \frac{2\pi}{\lambda_r} \cdot \frac{d(\vec{b}_r - \vec{b}) \cdot \vec{i}}{2}} \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Signalet mottatt på et lineært array er beskrevet i likning (4.8). Likning (4.13) beskriver den romlige Fouriertransformerte av signalet. Vinkelen mellom koordinatsystemets x akse og en retning  $\vec{b}$  betegnes  $\theta$  og vinkelen mellom x akse og retningen  $\vec{b}_r$  betegnes  $\theta_r$ .

$$\begin{aligned}
\vec{b} \cdot \vec{i} &= \cos \theta \\
\vec{b}_r \cdot \vec{i} &= \cos \theta_r.
\end{aligned}$$

Ved å sette i  $\cos \theta$  og  $\cos \theta_r$  inn i likning (4.13) kan den romlige Fouriertransformerte omformes til en funksjon med en endimensjonale størrelsen  $\theta$  som fri variabel.

$$X(\theta) = Ae^{j\omega_r t} \cdot e^{\frac{jQ-1}{2} \frac{2\pi}{\lambda_r} d(\vec{h}_r - \vec{h}) \cdot \vec{i}} \cdot \frac{\sin Q \cdot \frac{2\pi}{\lambda_r} \cdot \frac{d}{2} \cdot (\cos \theta_r - \cos \theta)}{\sin \frac{2\pi}{\lambda_r} \cdot \frac{d}{2} \cdot (\cos \theta_r - \cos \theta)} \tag{4.14}$$

$$|X(\theta)| = \left| \frac{\sin Q \cdot \frac{2\pi}{\lambda_r} \cdot \frac{d(\vec{b}_r - \vec{b}) \cdot \vec{i}}{2}}{\sin \frac{2\pi}{\lambda_r} \cdot \frac{d(\vec{b}_r - \vec{b}) \cdot \vec{i}}{2}} \right| = \left| \frac{\sin Q \cdot \frac{2\pi}{\lambda_r} \cdot \frac{d}{2} \cdot (\cos \theta_r - \cos \theta)}{\sin \frac{2\pi}{\lambda_r} \cdot \frac{d}{2} \cdot (\cos \theta_r - \cos \theta)} \right| \tag{4.15}$$

Fra likning (4.15) fremgår det :

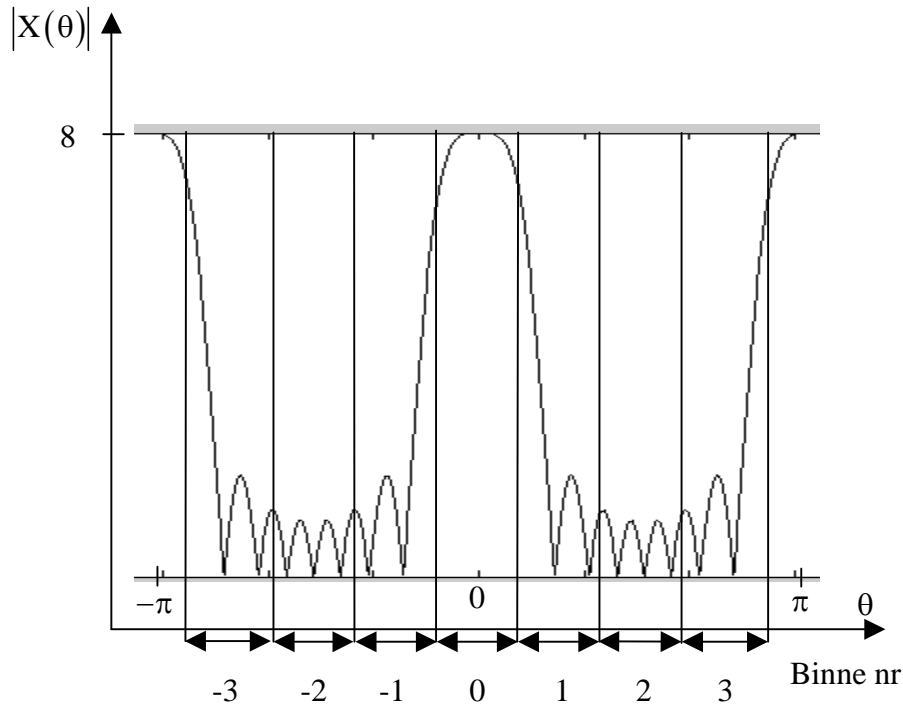
$$|X(\theta)| \text{ har sitt maksimum ved } Q \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{d}{2} (\cos \theta_r - \cos \theta) = 0$$



$|X(\theta)|$  har sine nullpunkter ved 
$$Q \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{d}{2} (\cos \theta_r - \cos \theta) = \pm \pi$$

Fra likning (4.15) fremgår det at desto flere elementer  $Q$  arrayet har, desto smalere blir loben.

Figur 4-7 viser et eksempel på et romlig Fouriertransformert signal fra et lineært array gitt av likning (4.15). Arrayet har 8 elementer, retningen til emitter er parallelt med  $\vec{i}$  og avstanden mellom elementene er  $d = \lambda/2$ .

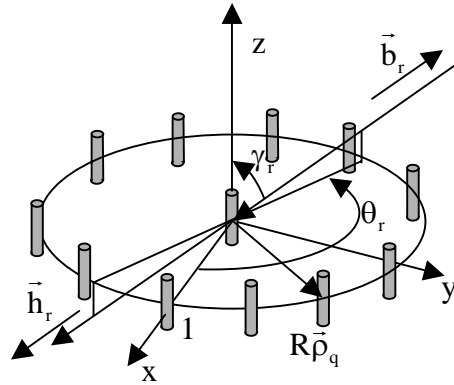


Figur 4-7 Romlig Fouriertransformert signal fra et lineært array med  $Q = 8$  ( 8 elementer),  $\theta = 0$ , og  $d/\lambda = 1/2$ .

Prosesseringen av signalet fra et array gjøres i en datamaskin og må da utføres ved hjelp av den digitale Fouriertransformen, se likning B.1 i appendiks B. Frekvensrommet deles opp i binner og antall binner er antall lik antall samplinger. Ved et array tilsvarer antall elementer antallet romlige samplinger og ved et array bestående av 8 elementer gir derfor 8 binner ved romlig digital Fouriertransformasjon (se figur 4.7).

#### 4.1.2 Romlig Fouriertransformasjon med sirkulært array

I et sirkulært array er elementene plassert på en sirkel hvor det er lik avstand mellom elementene. I sirkelens sentrum er element 0 plassert, mens elementene på sirkelen nummereres fra 1 til  $Q - 1$ . Et koordinatsystem med origo i referanseelementet og x-aksen igjennom element 1 defineres.



Figur 4-8 Sirkulært array

Figur 4-8 viser et sirkulært array. Fra figur 4-8 fremgår det:

$$\vec{d}_q = R\vec{\rho}_q$$

R er: Radius i arrayet.

$\vec{\rho}_q$  er: Enhetsvektoren som definerer  $\vec{d}_q$ 's retning.

Dette innsatt i likning (4.10) gir:

$$\begin{aligned} X(\vec{b}) &= Ae^{j\omega_r t} \sum_{q=0}^{Q-1} e^{j(\vec{k}_r - \vec{k}) \cdot \vec{d}_q} = Ae^{j\omega_r t} \sum_{q=0}^{Q-1} e^{j \frac{2\pi}{\lambda_r} (\vec{b}_r - \vec{b}) \cdot \vec{d}_q} = Ae^{j\omega_r t} \sum_{q=0}^{Q-1} e^{j \frac{2\pi}{\lambda_r} R \vec{\rho}_q \cdot (\vec{b}_r - \vec{b})} = \\ & Ae^{j\omega_r t} \sum_{q=0}^{Q-1} e^{j \frac{2\pi}{\lambda_r} R (\vec{\rho}_q \cdot \vec{b}_r - \vec{\rho}_q \cdot \vec{b})} \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\vec{b}_r = \sin \gamma_r \cos \theta_r \vec{i} + \sin \gamma_r \sin \theta_r \vec{j} + \cos \gamma_r \vec{k}$$

$$\vec{\rho}_q = \cos \left( q \frac{2\pi}{Q-1} \right) \vec{i} + \sin \left( q \frac{2\pi}{Q-1} \right) \vec{j}$$

$$\vec{b}_r \cdot \vec{\rho}_q = \sin \gamma_r \cdot \cos \theta_r \cdot \cos \left( q \frac{2\pi}{Q-1} \right) + \sin \gamma_r \cdot \sin \theta_r \cdot \sin \left( q \frac{2\pi}{Q-1} \right) =$$

$$\sin \gamma_r \cdot \left( \cos \theta_r \cdot \cos \left( q \frac{2\pi}{Q-1} \right) + \sin \theta_r \cdot \sin \left( q \frac{2\pi}{Q-1} \right) \right)$$

Tilsvarende gjelder for  $\vec{b}$ .

$$\begin{aligned}
\vec{b} \cdot \vec{\rho}_q &= \sin \gamma \cdot \left( \cos \theta \cdot \cos \left( q \frac{2\pi}{Q-1} \right) + \sin \theta \sin q \frac{2\pi}{Q-1} \right) \\
\vec{d}_q \cdot (\vec{b}_r - \vec{b}) &= R \vec{\rho}_q (\vec{b}_r - \vec{b}) = R (\vec{b}_r \vec{\rho}_q - \vec{b} \vec{\rho}_q) = \\
R \left( \sin \gamma_r \left( \cos \theta_r \cdot \cos \frac{q \cdot 2\pi}{Q-1} - \sin \theta_r \sin \frac{q \cdot 2\pi}{Q-1} \right) - \sin \gamma \left( \cos \theta \cdot \cos \frac{q \cdot 2\pi}{Q-1} - \sin \theta \cdot \sin \frac{q \cdot 2\pi}{Q-1} \right) \right) & \quad (4.17) \\
= R \left( \sin \gamma_r \cdot \cos \left( \frac{q \cdot 2\pi}{Q-1} - \theta_r \right) - \sin \gamma \cdot \cos \left( \frac{q \cdot 2\pi}{Q-1} - \theta \right) \right)
\end{aligned}$$

Likning (4.17) innsatt i likning (4.16) gir

$$\begin{aligned}
X(\vec{b}) &= X(\theta, \gamma) = A e^{j\omega_r t} \sum_{q=0}^{Q-1} e^{j \frac{2\pi}{\lambda_r} (\vec{b}_r - \vec{b}) \vec{d}_q} = A e^{j\omega_r t} \left( 1 + \sum_{q=1}^{Q-1} e^{j \frac{2\pi}{\lambda_r} (\vec{b}_r - \vec{b}) \vec{d}_q} \right) = \\
A e^{j\omega_r t} \left( 1 + \sum_{q=1}^{Q-1} e^{j \frac{2\pi}{\lambda_r} R (\vec{\rho}_q \vec{b}_r - \vec{\rho}_q \vec{b})} \right) &= \\
A e^{j\omega_r t} \left( 1 + \sum_{q=1}^{Q-1} \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_r} R \cdot (\vec{\rho}_q \vec{b}_r - \vec{\rho}_q \vec{b}) \right) + j \sum_{q=1}^{Q-1} \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda_r} R \cdot (\vec{\rho}_q \vec{b}_r - \vec{\rho}_q \vec{b}) \right) \right) & \quad (4.18) \\
A e^{j\omega_r t} + A e^{j\omega_r t} \sum_{q=1}^{Q-1} \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_r} R \cdot \sin \gamma_r \cdot \cos \left( \frac{q \cdot 2\pi}{Q-1} - \theta_r \right) - \frac{2\pi}{\lambda_r} R \cdot \sin \gamma \cdot \cos \left( \frac{q \cdot 2\pi}{Q-1} - \theta \right) \right) + \\
A e^{j\omega_r t} j \sum_{q=1}^{Q-1} \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda_r} R \sin \gamma_r \cdot \cos \left( \frac{q \cdot 2\pi}{Q-1} - \theta_r \right) - \frac{2\pi}{\lambda_r} R \sin \gamma \cdot \cos \left( \frac{q \cdot 2\pi}{Q-1} - \theta \right) \right)
\end{aligned}$$

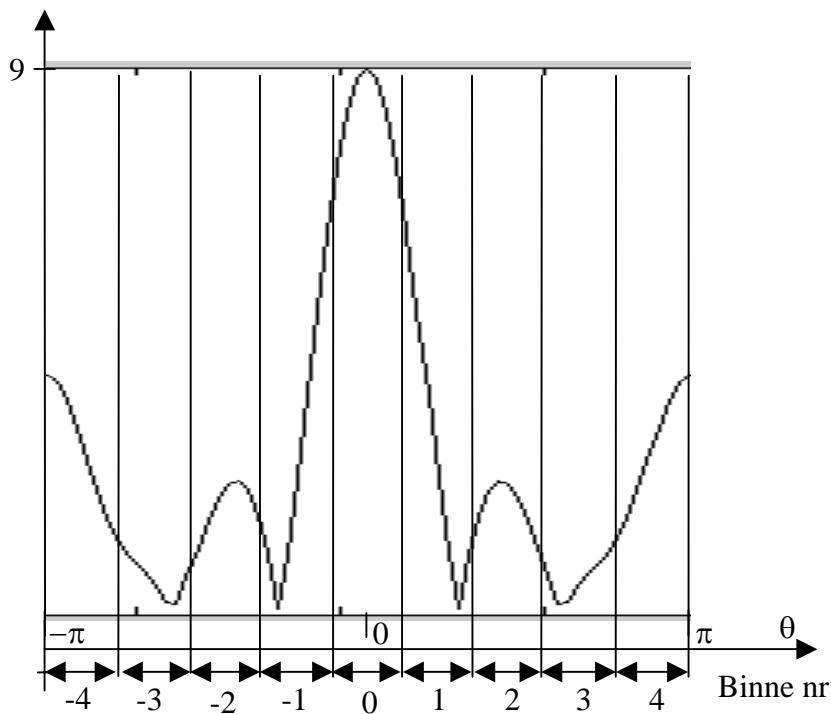
Likning (4.18) beskriver den romlige Fouriertransformerte  $X(\vec{b})$ . Dersom man antar  $\gamma_r = \frac{\pi}{2}$  reduseres likning (4.18) til.

$$\begin{aligned}
X(\vec{b}) &= A e^{j\omega_r t} \left( 1 + \sum_{q=1}^{Q-1} \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_r} R \cdot \cos \left( \frac{q \cdot 2\pi}{Q-1} - \theta_r \right) - \frac{2\pi}{\lambda_r} R \cdot \cos \left( \frac{q \cdot 2\pi}{Q-1} - \theta \right) \right) \right) + \\
j \sum_{q=1}^{Q-1} \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda_r} R \cos \left( \frac{q \cdot 2\pi}{Q-1} - \theta_r \right) - \frac{2\pi}{\lambda_r} R \cdot \cos \left( \frac{q \cdot 2\pi}{Q-1} - \theta \right) \right) & \quad (4.19)
\end{aligned}$$

Amplitudeverdien av signalet uttrykt i likning (4.19) er:

$$X(\vec{b}) = X(\theta) = A \left( \left( 1 + \sum_{q=1}^{Q-1} \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_r} R \cdot \cos \left( \frac{q \cdot 2\pi}{Q-1} - \theta_r \right) - \frac{2\pi}{\lambda_r} R \cdot \cos \left( \frac{q \cdot 2\pi}{Q-1} - \theta \right) \right) \right)^2 + \left( \sum_{q=1}^{Q-1} \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda_r} R \cos \left( \frac{q \cdot 2\pi}{Q-1} - \theta_r \right) - \frac{2\pi}{\lambda_r} R \cdot \cos \left( \frac{q \cdot 2\pi}{Q-1} - \theta \right) \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.20)$$

Figur 4-9 viser et eksempel på et romlig Fouriertransformert signal fra et sirkulært array gitt av likning (4.20).



Figur 4-9 Romlig Fouriertransformert signal fra et sirkulært array med  $Q = 9$  ( $8+1$  elementer),  $\theta = 0$ , og  $d/\lambda = 1/2$ .

#### 4.1.3 Oppsummering av egenskapene ved romlig Fouriertransform

Peiling ved hjelp av antennearray og romlig Fouriertransformasjon krever et urealistisk høyt antall antenneelementer dersom man skal oppnå peilinger med rimelig god nøyaktighet. For peiling er ikke beamforming alene spesielt godt egnet.

Imidlertid handler signaletterretning også om å detektere og identifisere svake signaler hvis signalparametere man i utgangspunktet ikke kjenner. Den klassiske metoden for å søke etter sig-

naler i et frekvensbånd er å benytte en søkemottaker som ”scanner” frekvensbåndet. Ved å benyttet DFT (digital Fouriertransformasjon) i tidsplanet kan man lage en stirrende mottaker som kan overvåke et relativt bredt bånd og detektere og analysere korte signaler. Ved å benytte romlig DFT i tillegg kan man oppnå en svært følsom mottaker med svært gode seleksjonsegenskaper. Dette fordi at man i en slik mottaker i tillegg til å diskriminere på frekvens også diskriminerer på retning uten at det koster vesentlig mer. Man oppnår også en forbedring av signal støyforholdet som er 10 ganger logaritmen til antall antenneelementer  $Q$  (likning (4.11)). Dette er en teknikk som har blitt lansert som en metode for å detektere svake radiosendere som forsøker å skjule seg i støyen (for eksempel radioer av typen DSSS).

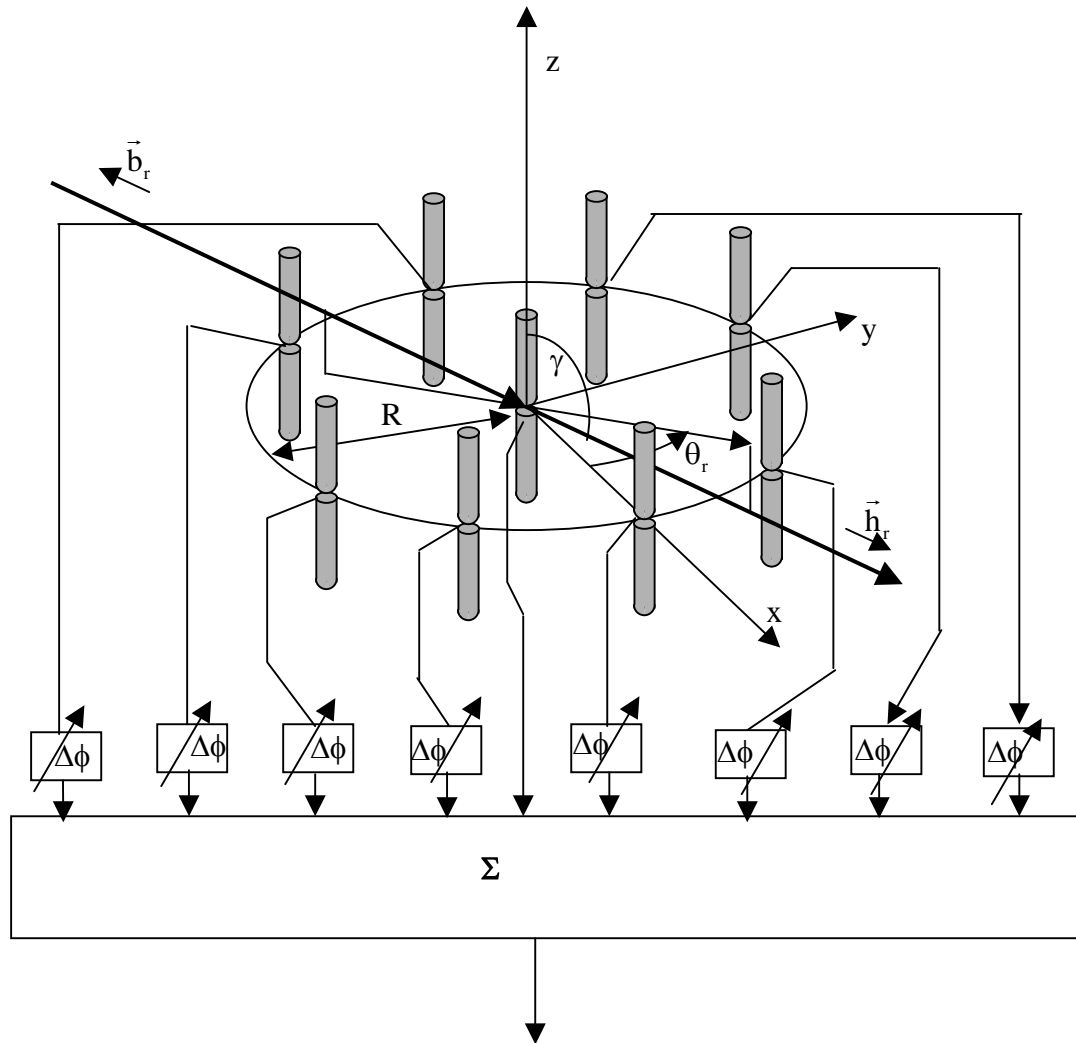
## 4.2 "Super resolution" algoritmer

I Hær-scenarioer vil det kunne være både tette signalmiljøer og kupert terreng som gir flerbaner. Ved slike forhold vil det være fordelaktig å benytte peilemetoder som kan peile flere emittere på samme frekvens samtidig slik at forstyrrelser fra andre emittere eller flerbaner kan elimineres. Peiling ved hjelp av romlig Fouriertransform som er beskrevet ovenfor er en peilemetode som kan peile flere emittere på samme frekvens, men vinkelopløsningen ved denne peilemetoden er svært dårlig. Imidlertid er det utviklet andre typer algoritmer som gir tilfredstillende oppløsning. Disse algoritmene kalles enkelte ganger ”Super-resolution” algoritmer og den mest kjente av disse er algoritmen MUSIC (MULTIPLE SIGNAL CLASSIFICATION).

### 4.2.1 Beamforming

Prinsippet "beamforming" (1) er å innføre en fasekorleksjon (forsinkelse)  $\Delta\phi_q$  på hvert signal mottatt fra et element i et antennearray på en slik måte at signaler fra en bestemt retning summeres koherent (summeres i fase). På denne måten dannes en direktiv antenne. Ved å endre fasekorleksjonene kan antenneloben dreies i rommet og på denne måten kan peiling utføres.

Figur 4-10. illustrer prinsippet for "beamforming" hvor et sirkulært array benyttes. Arrayet har radius  $R$  og består av  $Q$  elementer nummerert fra 0 til  $Q-1$ . Elementene fra nr. 1 til nr  $Q-1$  er plassert på en sirkel med lik avstand, mens element 0 er plassert i sirkelens sentrum



Figur 4-10 "Beam-forming" med sirkulært array.

Definerer et koordinatsystem med origo i arrayets sentrum og x akse igjennom element nr 1.

Element 0's posisjon er  $\vec{0}$ .

Element q's posisjon når  $1 \leq q \leq Q-1$  er:

$$\vec{d}_q = R\vec{\rho}_q = R \left( \cos \frac{2\pi}{Q-1} (q-1) \vec{i} + \sin \frac{2\pi}{Q-1} (q-1) \vec{j} \right) \quad (4.21)$$

R er: Arrayets radius. i

$\vec{\rho}_q$  er: Enhetsvektoren som definerer  $\vec{d}_q$ 's retning.

Et signal med propagasjonsretning  $\vec{h}_r$  mottas, hvor retningen til emitteren er  $\vec{b}_r = -\vec{h}_r$ .

$$\vec{h}_r = \sin \gamma \cdot \cos \theta_r \vec{i} + \sin \gamma \cdot \sin \theta_r \vec{j} + \cos \gamma \vec{k} \quad (4.22)$$

Faseforsinkelsen av signalet på element  $q$  ( $q \geq 1$ ) referert til signal mottatt på referanseelementet (element 0) er:

$$\varphi_q = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{h}_r \cdot \vec{d}_q = \frac{2\pi}{\lambda} R \left( \sin \gamma \cos \theta_r \cos \frac{2\pi}{Q-1} (q-1) + \sin \gamma \sin \theta_r \sin \frac{2\pi}{Q-1} (q-1) \right) \quad (4.23)$$

Ved bakkebasert peiling kan man anta at  $\gamma \approx \frac{\pi}{2}$  og likning (4.23) forenkles til:

$$\varphi_q = -\frac{2\pi}{\lambda} \vec{h}_r \cdot \vec{d}_q = -\frac{2\pi}{\lambda} R \left( \cos \theta_r \cos \frac{2\pi}{Q-1} (q-1) + \sin \theta_r \sin \frac{2\pi}{Q-1} (q-1) \right) \quad (4.24)$$

Signal mottatt på element 0 (referanseelementet) er:

$$S_0(t) = Ae^{j\omega t} \quad (4.25)$$

Signal mottatt på signal element  $q$  er:

$$S_q(t) = Ae^{j(\omega t + \varphi_q)} = Ce^{j\varphi_q} = Ce^{-j\frac{2\pi}{\lambda} R \left( \cos \theta_r \cos \frac{2\pi}{Q-1} (q-1) + \sin \theta_r \sin \frac{2\pi}{Q-1} (q-1) \right)} \quad (4.26)$$

På elementene fra nr 1 til nr  $Q-1$  innføres en fasekorleksjon  $\Delta\phi_q$  som skissert i figur 4-10.

Antar et mottatt signal med propagasjonsretningen  $\vec{h}_r$ , signalet fasekorrigeres og summeres.

Summert mottatt signal er:

$$X(\varphi_q, \Delta\phi_q) = C + \sum_{q=1}^{q=Q-1} Ce^{j(\varphi_q + \Delta\phi_q)} = C + \sum_{q=1}^{q=Q-1} Ce^{j\left(-\frac{2\pi}{\lambda} R \left( \cos \theta_r \cos \frac{2\pi}{Q-1} (q-1) + \sin \theta_r \sin \frac{2\pi}{Q-1} (q-1) \right) + \Delta\phi_q\right)} \quad (4.27)$$

Fasekorleksjonsleddene stilles inn for retningen  $\vec{b}_r$  etter følgende formel:

$$\Delta\phi_r = \frac{2\pi}{\lambda} R \left( \cos \theta_r \cos \frac{2\pi}{Q-1} (q-1) + \sin \theta_r \sin \frac{2\pi}{Q-1} (q-1) \right) \quad (4.28)$$

Likning (4.28) innsatt i likning (4.27) gir

$$X(\varphi_{qr}, \Delta\phi_{qr}) = C + \sum_{q=1}^{q=Q-1} C = C + (Q-1) \cdot C = CQ = Q \cdot Ae^{j\omega t} \quad (4.29)$$

Likning (4.29) er samme likning som likning (4.11) og viser at et signal med propagasjonsretningen  $\vec{h}_r$  summeres koherent i alle antenneelementene. Amplituden øker med faktoren  $Q$  og mottatt effekt øker med faktoren  $Q^2$ . Støy fra  $Q$  kanaler øker med faktoren  $Q$ , og resulterende forbedring av signal-støyforholdet vil være faktoren  $Q$ .

Betrakter  $\theta_r = \theta$  i likning (4.27) som den frie variable og setter inn uttrykket gitt av likning (4.28) for  $\Delta\phi_r$ .

$$\begin{aligned} X(\varphi, \Delta\phi_q) &= C + \sum_{q=1}^{q=Q-1} C e^{j \left( -\frac{2\pi}{\lambda} R \left( \cos\theta \cos\frac{2\pi}{Q-1}(q-1) + \sin\theta \sin\frac{2\pi}{Q-1}(q-1) \right) + \frac{2\pi}{\lambda} R \left( \cos\theta_r \cos\frac{2\pi}{Q-1}(q-1) + \sin\theta_r \sin\frac{2\pi}{Q-1}(q-1) \right) \right)} = \\ &= C + \sum_{q=1}^{q=Q-1} C e^{j \frac{2\pi}{\lambda} R \left( \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{Q-1}(q-1)\right) - \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{Q-1}(q-1)\right) \right)} = C + C \sum_{q=0}^{q=Q-1} e^{j \frac{2\pi}{\lambda} R \left( \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{Q-1}q\right) - \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{Q-1}q\right) \right)} = \\ &Ae^{j\omega t} \left( 1 + \sum_{q=0}^{q=Q-1} e^{j \frac{2\pi}{\lambda} R \left( \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{Q-1}q\right) - \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{Q-1}q\right) \right)} \right) = \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} &Ae^{j\omega t} \left( \left( 1 + \sum_{q=0}^{q=Q-1} \cos\frac{2\pi}{\lambda} R \left( \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{Q-1}q\right) - \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{Q-1}q\right) \right) \right) \right. \\ &\left. + j \sum_{q=0}^{q=Q-1} \sin\frac{2\pi}{\lambda} R \left( \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{Q-1}q\right) - \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{Q-1}q\right) \right) \right) \\ X(\varphi, \Delta\phi_q)_{\text{amp}} &= A \left( \left( 1 + \sum_{q=0}^{q=Q-1} \cos\frac{2\pi}{\lambda} R \left( \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{Q-1}q\right) - \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{Q-1}q\right) \right) \right)^2 + \right. \\ &\left. \left( \sum_{q=0}^{q=Q-1} \sin\frac{2\pi}{\lambda} R \left( \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{Q-1}q\right) - \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{Q-1}q\right) \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Likning (4.31) kan skrives som

$$\begin{aligned} X(\varphi, \Delta\phi_q)_{\text{amp}} &= A \left( \left( 1 + \sum_{q=0}^{q=Q-1} \cos\left( \frac{2\pi}{\lambda} R \cos\left( \frac{2\pi}{Q-1}q - \theta_r \right) \right) - \frac{2\pi}{\lambda} R \cos\left( \frac{2\pi}{Q-1}q - \theta \right) \right)^2 + \right. \\ &\left. \left( \sum_{q=0}^{q=Q-1} \sin\left( \frac{2\pi}{\lambda} R \cos\left( \frac{2\pi}{Q-1}q - \theta_r \right) - \frac{2\pi}{\lambda} R \cos\left( \frac{2\pi}{\lambda}q - \theta \right) \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Likning (4.32) er identisk med likning (4.20) og figur 4-9 viser derfor også et eksempel på en



lobe som fremkommer ved beamforming.

Loben som dannes ved "beamforming" har samme egenskaper som loben som dannes ved romlig Fouriertransformasjon. Forskjellen er at man ved å endre fasekorreksjonene  $\Delta\phi$  kan avløse asimetplanet og på den måten retningsbestemme mottatte signaler. Som det fremgår av likning (4.32) blir loben smalere desto flere antenneelementer arrayet har.

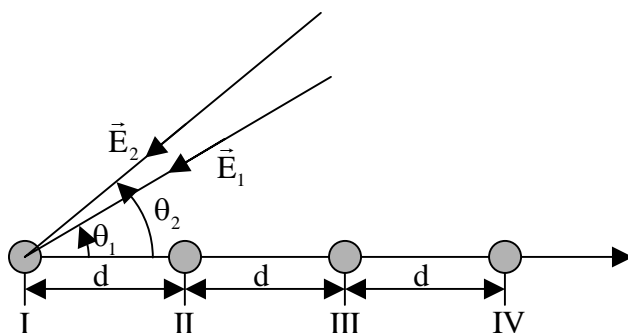
Ofte er antenneelement 0 (referanseelementet) imaginært og likning (4.32) vil da ha formen

$$X(\varphi, \Delta\phi_q)_{\text{amp}} = A \left( \left( \sum_{q=0}^{q=Q-1} \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} R \cos \left( \frac{2\pi}{Q-1} q - \theta \right) \right) - \frac{2\pi}{\lambda} R \cos \left( \frac{2\pi}{Q-1} q - \theta_r \right) \right)^2 + \left( \sum_{q=0}^{q=Q-1} \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} R \cos \left( \frac{2\pi}{Q-1} q - \theta \right) - \frac{2\pi}{\lambda} R \cos \left( \frac{2\pi}{Q-1} q - \theta_r \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.33)$$

#### 4.2.2 Pronys metode

Pronys metode (5) er en algoritme for å bestemme retningen til flere samtidige mottatte signaler. Pronys metode for retningsbestemmelse er svært nøyaktig og betydelig mer nøyaktig enn "beamforming". Ulempen med algoritmen er at for å bestemme retningen for  $M$  samtidige mottatte signaler trengs et array med  $2M$  elementer, mens det ved beamforming ikke er slike begrensninger. En annen ulempe ved Pronys algoritme er at man på forhånd må vite hvor mange samtidige signaler man mottar. En fordel med algoritmen er at den ikke er følsom for at signalene kan være korrelert, noe som er en svakhet ved Music algoritmen (flerbane problematikk).

I Prony's algoritme benyttes et lineært array. For å kunne bestemme retningen for  $M$  samtidige mottatte signaler trengs et array med  $2M$  elementer.



Figur 4-11 Fire elementers array med to samtidige innkommende signaler.

Figur 4-11 viser et lineært array med fire elementer som mottar 2 samtidige signaler. Avstanden

mellom hvert element er  $d$ . Element I defineres som referanseelement. Mottatt signal på elementene betegnes henholdsvis  $S_0(\omega t)$ ,  $S_1(\omega t)$ ,  $S_2(\omega t)$  og  $S_3(\omega t)$ .

Det antas signalene består av bidrag fra 2 emittere. De 2 bidragene betegnes:

$$E_1(t) = E_1 e^{j(\omega t + \psi_1)} = A_1 e^{j\omega t} \quad \text{og} \quad E_2(t) = E_2 e^{j(\omega t + \psi_2)} = A_2 e^{j\omega t}$$

På arrayets elementer mottas følgende signaler:

$$\begin{aligned} S_0(\omega t) &= \text{Re} \left\{ A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{j\omega t} \right\} \\ S_1(\omega t) &= \text{Re} \left\{ A_1 e^{j\left(\omega t + \frac{d}{c} \cos \theta_1\right)} + A_2 e^{j\left(\omega t + \frac{d}{c} \cos \theta_2\right)} = A_1 e^{j\omega t} e^{j\left(\frac{d}{c} \cos \theta_1\right)} + A_2 e^{j\omega t} e^{j\left(\frac{d}{c} \cos \theta_2\right)} \right\} \\ S_2(\omega t) &= \text{Re} \left\{ A_1 e^{j\left(\omega t + \frac{2d}{c} \cos \theta_1\right)} + A_2 e^{j\left(\omega t + \frac{2d}{c} \cos \theta_2\right)} = A_1 e^{j\omega t} e^{j\left(\frac{d}{c} \cos \theta_1\right)^2} + A_2 e^{j\omega t} e^{j\left(\frac{d}{c} \cos \theta_2\right)^2} \right\} \\ S_3(\omega t) &= \text{Re} \left\{ A_1 e^{j\left(\omega t + \frac{3d}{c} \cos \theta_1\right)} + A_2 e^{j\left(\omega t + \frac{3d}{c} \cos \theta_2\right)} = A_1 e^{j\omega t} e^{j\left(\frac{d}{c} \cos \theta_1\right)^3} + A_2 e^{j\omega t} e^{j\left(\frac{d}{c} \cos \theta_2\right)^3} \right\} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Definerer

$$\begin{aligned} c_1 &= A_1 e^{j\omega t} \\ c_2 &= A_2 e^{j\omega t} \\ z_1 &= e^{j\frac{d}{c} \cos \theta_1} \\ z_2 &= e^{j\frac{d}{c} \cos \theta_2} \end{aligned} \quad (4.35)$$

På kompleks form skrives signalene gitt i likning (4.34) som

$$\begin{aligned} X(0) &= A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{j\omega t} = C_1 + C_2 \\ X(1) &= A_1 e^{j\omega t} e^{j\left(\frac{d}{c} \cos \theta_1\right)} + A_2 e^{j\omega t} e^{j\left(\frac{d}{c} \cos \theta_2\right)} = C_1 z_1 + C_2 z_2 \\ X(2) &= A_1 e^{j\omega t} e^{j\left(\frac{d}{c} \cos \theta_1\right)^2} + A_2 e^{j\omega t} e^{j\left(\frac{d}{c} \cos \theta_2\right)^2} = C_1 z_1^2 + C_2 z_2^2 \\ X(3) &= A_1 e^{j\omega t} e^{j\left(\frac{d}{c} \cos \theta_1\right)^3} + A_2 e^{j\omega t} e^{j\left(\frac{d}{c} \cos \theta_2\right)^3} = C_1 z_1^3 + C_2 z_2^3 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Signalene  $x(0)$ ,  $x(1)$ ,  $x(2)$  og  $x(3)$  på kompleks form gitt av likning (4.36) kan bestemmes av likningssettet (4.37).

$$\begin{aligned}
x(0) &= S_0(\omega t) + jS_0(\omega t - \omega\tau) = S_0(\omega t) + jS_0\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = S_0\left(t - \frac{T}{4}\right) \\
x(1) &= S_1(\omega t) + jS_1(\omega t - \omega\tau) = S_1(\omega t) + jS_1\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = S_1(t) + jS_1\left(t - \frac{T}{4}\right) \\
x(2) &= S_2(\omega t) + jS_2(\omega t - \omega\tau) = S_2(\omega t) + jS_2\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = S_2(t) + jS_2\left(t - \frac{T}{4}\right) \\
x(3) &= S_3(\omega t) + jS_3(\omega t - \omega\tau) = S_3(\omega t) + jS_3\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = S_3(t) + jS_3\left(t - \frac{T}{4}\right)
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Definerer 2 konstanter  $a_1$  og  $a_2$  slik at følgende betingelser er oppfylt

$$\begin{aligned}
a_2x(0) + a_1x(1) &= x(2) \\
a_2x(1) + a_1x(2) &= x(3)
\end{aligned}$$

som også kan skrives på formen.

$$\begin{aligned}
a_1x(1) + a_2x(0) &= x(2) \\
a_1x(2) + a_2x(1) &= x(3)
\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{bmatrix} x(1) & x(0) \\ x(2) & x(1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} \tag{4.39}$$

Siden  $x(0)$ ,  $x(1)$ ,  $x(2)$  og  $x(3)$  er de målte mottatte signalene på arrayets elementer ved tidspunktet  $t$  kan konstantene  $a_1$  og  $a_2$  bestemmes.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(1) & x(0) \\ x(2) & x(1) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

Likningene (4.36) og (4.38) manipuleres som følger:

$$\begin{aligned}
a_1x(1) + a_2x(0) - x(2) &= a_1(c_1z_1 + c_2z_2) + a_2(c_1 + c_2) - (c_1z_1^2 + c_2z_2^2) = \\
a_1c_1z_1 + a_1c_2z_2 + a_2c_1 + a_2c_2 - c_1z_1^2 - c_2z_2^2 &= \\
c_1(-z_1^2 + a_1z_1 + a_2) + c_2(-z_2^2 + a_1z_2 + a_2) &= 0
\end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}
a_1 x(2) + a_2 x(1) - x(3) &= a_1 (c_1 z_1^2 + c_2 z_2^2) + a_2 (c_1 z_1 + c_2 z_2) - (c_1 z_1^3 + c_2 z_2^3) = \\
a_1 c_1 z_1^2 + a_1 c_2 z_2^2 + a_2 c_1 z_1 + a_2 c_2 z_2 - c_1 z_1^3 - c_2 z_2^3 &= \\
c_1 (-z_1^3 + a_1 z_1^2 + a_2 z_1) + c_2 (-z_2^3 + a_1 z_2^2 + a_2 z_2) &= \\
c_1 z_1 (-c_1 z_1^2 + a_1 z_1 + a_2) + c_2 z_2 (-z_2^2 + a_1 z_2 + a_2) &= 0
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Likningene (4.40) og (4.41) har det til felles at de er tilfredsstilt dersom følgende betingelser er oppfylt.

$$\begin{aligned}
z_1^2 - a_1 z_1 - a_2 &= 0 \\
z_2^2 - a_1 z_2 - a_2 &= 0
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Betingelsen formulert i likning (4.42) kalle *Prony's betingelse* og formuleres vanligvis som

$$z_i^2 - a_1 z_i - a_2 = 0$$

Likningssettet (4.42) gir følgende løsning for  $z_1$  og  $z_2$ :

$$z_1 = \frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2 + 4a_2}{4}} \quad z_2 = \frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2 + 4a_2}{4}}$$

$z_1$  og  $z_2$  er definert i likning (4.35) som

$$\begin{aligned}
z_1 &= e^{\frac{d}{c} \cos \theta_1} \\
z_2 &= e^{\frac{d}{c} \cos \theta_2}
\end{aligned}$$

Når  $z_1$  og  $z_2$  er beregnet kan vinklene  $\theta_1$  og  $\theta_2$  beregnes.

Prony's algoritme kan utvides til å gjelde for et generelt lineært array med lengde  $2M$ . I appendiks C er algoritme for det generelle tilfellet utledet. *Prony's betingelse* for det generelle tilfellet er:

$$z^M - \sum_{i=0}^{M-1} a_{M-i} z^i = 0 \tag{4.43}$$

Røttene  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_r, \dots, z_M$  i likning (4.43) kan finnes ved hjelp av iterative metoder.

Da  $z_r = e^{\frac{d}{c} \cos \theta_r}$  kan retningen  $\theta_r$  lett finnes når  $z_r$  er funnet.

Dersom antall mottatte signaler  $N < M$  man som beskrevet i appendiks C, oppnå en korrelasjonsgevinst ved bestemmelse konstantene  $a_1, a_2, a_3, \dots$  og derigjennom oppnå større nøyaktighet.

### 4.2.3 MUSIC.

MUSIC (MULTiple SIngal Classification) er en metode eller algoritme for å bestemme flere samtidig mottatte signaler. MUSIC algoritmen ble oppfunnet av amerikaneren Ralph O. Schmidt i 1981. Ideen bak MUSIC algoritmen er å krysskorrelere signalene fra elementene i et antennearray. Ut fra kovariansmatrisen kan både antall mottatte signaler og retningen til emitterne bestemmes.

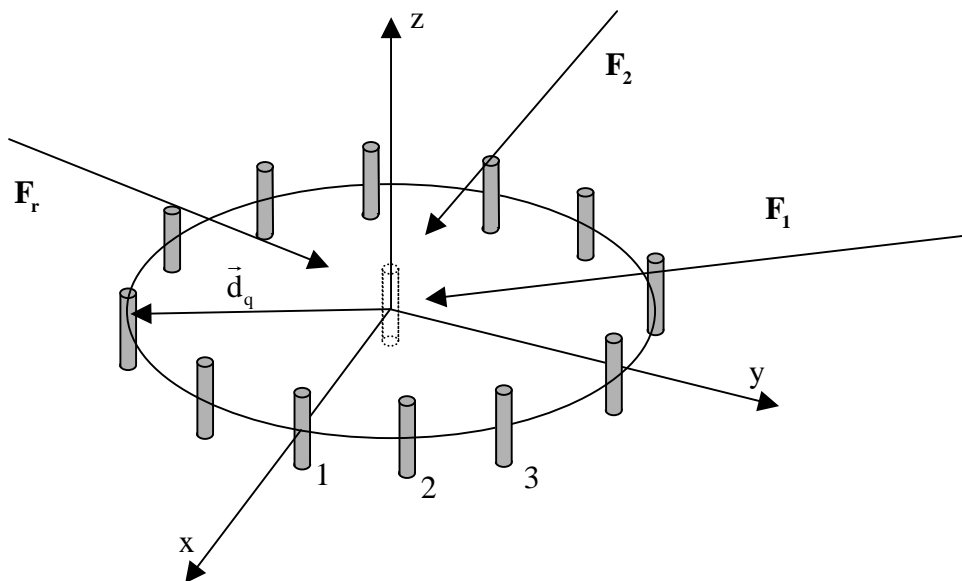
Arrayet kan være et hvilket som helst array. Imidlertid vil trolig et sirkulært array være mest aktuelt i et praktisk system. Det er derfor valgt å referere til et sirkulært array i fremstillingen nedenfor.

Antar et array bestående av  $Q$  elementer. Dersom antall innkommende signaler er mindre enn  $Q$  kan antall innkommende signaler bestemmes. Algoritmen kan retningsbestemme opptil  $Q - 1$  signaler. Music algoritmen er svært presis sammenlignet med "beamforming" ved et array med samme antall elementer (5).

Forutsetningen for algoritmen er at de innkommende signalene er ukorrelert, noe som i praksis er tilfelle for de aller fleste signaler. Effekter som bidrar til at signaler med samme frekvens ikke er korrelert er modulasjonseffekter, små frekvensforskjeller, fadingeffekter eller andre variasjoner. Imidlertid er betingelsen om at signalene må være ukorrelerte en svakhet ved oppløsning av flerbaner (se likning (4.56)).

Music algoritmen synes å være en algoritme med store muligheter, og det er forbausende at den ikke er blitt tatt mer i praktisk bruk. I systemer som for eksempel multistatisk radar mot bevegelige mål vil Music algoritmen være svært velegnet. Man kan for eksempel benytte relativt lavfrekvente sendere ( $<100\text{Hz}$ ). Fordelen med lav frekvens er at de muliggjør et array med stor aparture (og tilsvarende stort gain), men dopplershift blir lavt (appendiks A, likning A-1). Selv om dopplershiftet er lavt vil det allikevel være tilstrekkelig til å forhindre korrelasjon.

## 4.2.3.1 Music-algorithmens teoretiske grunnlag.



Figur 4-12 Sirkulært array

Figur 4-12 viser et sirkulært array bestående av  $Q$  elementer pluss et imaginært referanseelement. Arrayet har radien  $R$ . Elementene numereres  $1, 2, 3, \dots, Q$ . Det imaginære elementet i sentrum betegnes element  $0$ . Definerer et koordinatsystem med origo i arrayets sentrum og  $x$  aksen igjennom element  $1$ . Elementenes posisjon betegnes med posisjonsvektoren  $\vec{d}_q = R\vec{\rho}_q$ .

Antar et signal  $\vec{E}_r$  som transmitteres fra emitter  $r$ . Retningen til emitter  $r$  er  $\vec{b}_r$ . Ved hjelp av tilsvarende resonnoment som vist i likning (4.6) følger at forsinkelsen  $\tau_q$  på element  $q$  i forhold til referanseelementet er:

$$\tau_{q,r} = -\frac{\vec{d}_q \cdot \vec{b}_r}{c}$$

$\tau_{q,r}$  er: Forsinkelse av signalet fra emitter  $r$  i antenne element nr  $q$  referert til element  $0$ .

$\vec{d}_q$  er: Antenne element  $q$ 's posisjonsvektor.

$\vec{b}_r$  er: Enhetsvektor som angir retning til emitter  $r$ .

$c$  er: Propagasjonsfarten (propagasjonshastigheten er  $\vec{c}$ ).

Mottatt signal fra emitter r på referanseelementet er:

$$s(0, r) = \text{Re}\{z_r(0, r)\} = \text{Re}\{A_r e^{j\omega t + \psi_r}\} = \text{Re}\{C_r e^{j\omega t}\}$$

Mottatt signal fra emitter r på element nr q referert til referanseelementet er :

$$\begin{aligned} s(q, r) &= \text{Re}\{z_r(q, r)\} = \text{Re}\{z(t - \tau_{qr})\} = \text{Re}\left\{z\left(t + \frac{\vec{d}_q \vec{b}_r}{c}\right)\right\} = \text{Re}\left\{C_r e^{j\omega\left(t + \frac{\vec{d}_q \vec{b}_r}{c}\right)}\right\} = \\ &= \text{Re}\left\{C_r e^{j\omega\left(t + \frac{R \cos\left(\frac{2\pi}{Q}(q-1) - \theta_r\right)}{c}\right)}\right\} = \text{Re}\left\{C_r e^{j\omega t} \cdot e^{j\frac{2\pi}{\lambda} R \cos(\theta_q - \theta_r)}\right\} = \text{Re}\{C_r e^{j\omega t} e^{j\phi_{q,r}}\} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Mottatt signal fra emitter r på element nr q på kompleks form referert til referanseelementet er:

$$z(q, r) = z(t - \tau_{qr}) = z\left(t + \frac{\vec{d}_q \vec{b}_r}{c}\right) = C_r e^{j\omega\left(t + \frac{\vec{d}_q \vec{b}_r}{c}\right)} = C_r e^{j\omega t} \cdot e^{j\frac{2\pi}{\lambda} R \cos(\theta_q - \theta_r)} = C_r e^{j\omega t} e^{j\phi_{q,r}} \quad (4.45)$$

Definerer:

$$\alpha(q, r) = e^{j\frac{2\pi}{\lambda} R \cos(\theta_q - \theta_r)} = e^{j\phi_{q,r}} \quad (4.46)$$

$$F(r) = C_r e^{j\omega t} \quad (4.47)$$

$$z(q, r) = \alpha(q, r) F(r) \quad (4.48)$$

Antar at man mottar signal fra D forskjellige emittere. Antar signalene som mottas inneholder additiv støy. Støyen fra element q betegnes  $w(q)$ . Mottatt signal på antenneelement (q) betegnes  $Z(q)$ .

$$Z(1) = \sum_{r=1}^D z(1,r) = \alpha(1,1)F(1) + \alpha(1,2)F(2) + \dots + \alpha(1,D)F(D) + w(1)$$

$$Z(2) = \sum_{r=1}^D z(2,r) = \alpha(2,1)F(1) + \alpha(2,2)F(2) + \dots + \alpha(2,D)F(D) + w(2)$$

.....  
 .....

$$Z(Q) = \sum_{r=1}^D z(Q,r) = \alpha(Q,1)F(1) + \alpha(Q,2)F(2) + \dots + \alpha(Q,D)F(D) + w(Q)$$

$$\begin{bmatrix} Z(1) \\ Z(2) \\ \vdots \\ Z(Q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(1,1) & \alpha(1,2) & \cdots & \alpha(1,D) \\ \alpha(2,1) & \alpha(2,2) & \cdots & \alpha(2,D) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha(Q,1) & \alpha(Q,2) & \cdots & \alpha(Q,D) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F(1) \\ F(2) \\ \vdots \\ F(D) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W(1) \\ W(2) \\ \vdots \\ W(Q) \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Likning (4.49) skrives på følgende form.

$$\vec{Z} = [A] \cdot \vec{F} + \vec{W} \quad (4.50)$$

I likning (4.50) varierer  $\vec{F}$  og  $\vec{W}$  som funksjon av tiden, mens  $[A]$  er konstant og kun avhengig av antennegeometrien og retningen til emitterene.  $\vec{F}$  representerer innkommende signaler, mens  $\vec{W}$  er ukorrelerert støy (hvit støy).

Kolonnevektorene i matrise  $[A]$  kalles mode vektorene og betegnes:

$$\vec{A}(1) = \begin{bmatrix} \alpha(1,1) \\ \alpha(2,1) \\ \vdots \\ \alpha(Q,1) \end{bmatrix} \quad \vec{A}(2) = \begin{bmatrix} \alpha(1,2) \\ \alpha(2,2) \\ \vdots \\ \alpha(Q,2) \end{bmatrix} \quad \dots \quad \vec{A}(D) = \begin{bmatrix} \alpha(1,D) \\ \alpha(2,D) \\ \vdots \\ \alpha(Q,D) \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Elementene i modevektorene er gitt av likning (4.46). Modevektoren  $\vec{A}(r)$  er kun avhengig av arrayets geometri og retningen til emitter r.

Kovariansmatrisen  $[\rho]$  for signalene mottatt på arrayets elementer er:

$$[\rho] = E[\vec{Z} \cdot \vec{Z}^H] = E \left[ \begin{bmatrix} Z(1) \\ Z(2) \\ \vdots \\ Z(Q) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z^*(1) & Z^*(2) & \cdots & Z^*(Q) \end{bmatrix} \right] =$$



$$\mathbf{E} \begin{bmatrix} \mathbf{E}[Z(1)Z^*(1)] & \mathbf{E}[Z(1)Z^*(2)] & \cdots & \mathbf{E}[Z(1)Z^*(Q)] \\ \mathbf{E}[Z(2)Z^*(1)] & \mathbf{E}[Z(2)Z^*(2)] & \cdots & \mathbf{E}[Z(2)Z^*(Q)] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{E}[Z(Q)Z^*(1)] & \mathbf{E}[Z(Q)Z^*(2)] & \cdots & \mathbf{E}[Z(Q)Z^*(Q)] \end{bmatrix} = \quad (4.52)$$

$$\begin{bmatrix} \rho(0) & \rho(-1) & \cdots & \rho(-(Q-1)) \\ \rho(1) & \rho(0) & \cdots & \rho(-(Q-2)) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \rho(Q-1) & \rho(Q-2) & \cdots & \rho(0) \end{bmatrix}$$

Fra likning (4.52) fremgår det at

$$[\rho]^T = [\rho]^* \quad (4.53)$$

Kovariansmatrisen  $[\rho]$  er en Hermitisk matrise, og har derfor reelle egenverdier. Fra likning (4.52) fremgår det at dersom de mottatte signalene på antenneelementene  $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_Q$  er ukorrelet så er kovariansmatrisen  $[\rho]$  en diagonalmatrise, det vil si "off-diagonal" elementene er null. Når "off-diagonal" elementene er null så betyr dette at det kun mottas støy. Dersom det mottas signaler vil det være korrelasjon mellom signalene som mottas på de ulike antenneelement og "off-diagonal" elementene vil derfor ha verdi. Informasjonen om retningen til emitterene er inneholdt i "off-diagonal" elementene.

Diagonalelementene i kovariansmatrisen  $[\rho]$  vil i prinsippet ha samme verdi, dette er uttrykk for at signalene mottas like sterkt på alle elementene (ikke direktive antenner).

I et system hvor arrayet har  $Q$  elementer vil kovariansmatrisen ha rangen  $Q$ .

Likning (4.50) innsatt i likning (4.52) gir:

$$\begin{aligned} [\rho] &= \mathbf{E}[\bar{\mathbf{Z}} \cdot \bar{\mathbf{Z}}^H] = \mathbf{E}\left[\left([\mathbf{A}]\bar{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{W}}\right) \cdot \left([\mathbf{A}]\bar{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{W}}\right)^H\right] = \mathbf{E}\left[\left([\mathbf{A}]\bar{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{W}}\right) \left(\bar{\mathbf{F}}^H [\mathbf{A}]^H + \bar{\mathbf{W}}^H\right)\right] = \\ & \mathbf{E}\left[[\mathbf{A}]\bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{F}}^H [\mathbf{A}]^H\right] + \mathbf{E}\left[[\mathbf{A}]\bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{W}}^H\right] + \mathbf{E}\left[\bar{\mathbf{W}}\bar{\mathbf{F}}^H [\mathbf{A}]^H\right] + \mathbf{E}\left[\bar{\mathbf{W}} \cdot \bar{\mathbf{W}}^H\right] = \\ & \mathbf{E}\left[[\mathbf{A}]\bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{F}}^H [\mathbf{A}]^H\right] + [\mathbf{I}]\sigma^2 = [\mathbf{A}] \cdot \mathbf{E}\left[\bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{F}}^H\right] \cdot [\mathbf{A}]^H + [\mathbf{I}]\sigma^2 \\ [\rho] &= \mathbf{E}\left[[\mathbf{A}]\bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{F}}^H [\mathbf{A}]^H\right] + [\mathbf{I}]\sigma^2 = [\mathbf{A}] \cdot \mathbf{E}\left[\bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{F}}^H\right] \cdot [\mathbf{A}]^H + [\mathbf{I}]\sigma^2 \end{aligned} \quad (4.54)$$

Definerer  $[P] = E[\vec{F} \cdot \vec{F}^H]$ . Fra likning (4.54) følger:

$$[\rho] = [A][P][A]^H + [I]\sigma^2 \quad (4.55)$$

$$[P] = E \left[ \begin{array}{c} F(1) \\ F(2) \\ \vdots \\ F(D) \end{array} \begin{array}{c} [F^*(1) \quad F^*(2) \quad \dots \quad F^*(D)] \end{array} \right] = \quad (4.56)$$

$$\begin{bmatrix} E[F(1)F^*(1)] & E[F(1)F^*(2)] & \dots & E[F(1)F^*(D)] \\ E[F(2)F^*(1)] & E[F(2)F^*(2)] & \dots & E[F(2)F^*(D)] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E[F(D)F^*(1)] & E[F(D)F^*(2)] & \dots & E[F(D)F^*(D)] \end{bmatrix}$$

$[P] = \vec{F} \cdot \vec{F}^H$  er en kovariansmatrise for de transmitterte signalene. Det antas at det transmitteres  $D$  signaler.  $[P]$  vil derfor være en  $D \times D$  matrise. Fra likning (4.56) fremgår det at dersom signalene  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_D$  er ukorrelerte så er  $[P]$  en diagonalmatrise og har rangen  $D$ . Dersom to signaler  $F(r)$  og  $F(s)$  er "absolutt" (100 %) korrelerte det vil si  $F(r) = k \cdot F(s)$ , vil  $[P]$  være singulær. Det vil si at 2 signaler vil bli oppfattet som ett signal definert som vektorsummen av de 2 signalene.

Rangen i matrisen  $[P]$  er lik antall ukorrelerte signaler  $D$ .

Matrisen  $[A][P][A]^H$  er en  $Q \times Q$  matrise. Rangens av matrisen  $[A][P][A]^H$  er  $D$ , hvor  $D < Q$ .

Fra likning (4.55) følger:

$$\det([A][P][A]^H) = \det([\rho] - \sigma^2 [I]) = 0 \quad (4.57)$$

For at likning (4.57) skal være tilfredstilt må  $\sigma^2$  være lik en egenverdi i kovariansmatrisen  $[\rho]$ . I appendiks D er det vist at denne egenverdien er den laveste egenverdien i kovariansmatrisens  $[\rho]$ . Herav følger:

*Dersom rangen av  $[A][P][A]^H$  er mindre enn  $Q$  ( $D < Q$ ) så representerer den minste egenverdien i kovariansmatrisen  $[\rho]$  støyeffekten  $\sigma^2$  det vil si  $\lambda_{min} = \sigma^2$*

$$\lambda_{\min} = \sigma^2 \quad (4.58)$$

Imidlertid kan  $\lambda_{\min}$  være multippel, det vil si  $\lambda_{\min}$  kan ha flere egenvektorer tilordnet.

Egenvektorene i kovariansmatrisen betegnes:

$$\vec{\mathcal{E}}_1 = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ \vdots \\ e_{Q1} \end{bmatrix} \quad \vec{\mathcal{E}}_2 = \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{22} \\ \vdots \\ e_{Q2} \end{bmatrix} \quad \vec{\mathcal{E}}_i = \begin{bmatrix} e_{1i} \\ e_{2i} \\ \vdots \\ e_{Qi} \end{bmatrix}$$

En egenvektor som er avledet av  $\lambda_{\min} = \sigma^2$  betegnes som en støyegenvektor  $\vec{\mathcal{E}}_N$

Likning (4.55) kombinert med likning (4.58) gir

$$[\rho] = [A][P][A]^H + [I]\lambda_{\min} \quad (4.59)$$

$$[\rho]\vec{\mathcal{E}}_N = [A][P][A]^H \vec{\mathcal{E}}_N + [I]\lambda_{\min} \vec{\mathcal{E}}_N$$

$$[\rho]\vec{\mathcal{E}}_N = [I]\lambda_{\min} \vec{\mathcal{E}}_N$$

$$[I]\lambda_{\min} \vec{\mathcal{E}}_N = [A][P][A]^H \vec{\mathcal{E}}_N + [I]\lambda_{\min} \vec{\mathcal{E}}_N$$

$$[A][P][A]^H \vec{\mathcal{E}}_N = [0] \quad (4.60)$$

Matrisen  $[A]$  er en  $Q \times D$  matrise med rangen  $D$ .

Matrisen  $[P]$  er en  $D \times D$  matrise med rangen  $D$ .

$[A][P]$  er en  $Q \times D$  matrise med rangen  $D$ .

$[A]^H \vec{\mathcal{E}}_N$  er en  $D \times 1$  matrise, det vil si en vektor med  $D$  elementer.

Definerer  $\vec{U} = [A]^H \vec{\mathcal{E}}_N$

$$[[A][P]] \cdot \vec{U} = 0 \quad (4.61)$$

Da  $[[A][P]]$  har rangen  $D$ , har likning (4.61) kun den trivielle løsningen  $\vec{U} = 0$  det vil si at :

$$[A]^H \vec{\mathcal{E}}_N = [0] \quad (4.62)$$

Kolonnevektorene i matrisen  $[A]$  består av mode vektorene (likning (4.51)).

$$[A]^H \vec{\mathcal{E}}_N = \begin{bmatrix} \vec{A}^H(1) \\ \vec{A}^H(2) \\ \vdots \\ \vec{A}^H(Q) \end{bmatrix} \cdot \vec{\mathcal{E}}_N = \begin{bmatrix} \alpha^*(1,1) & \alpha^*(2,1) & \cdots & \alpha^*(Q,1) \\ \alpha^*(2,1) & \alpha^*(2,2) & \cdots & \alpha^*(Q,2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^*(Q,1) & \alpha^*(Q,2) & \cdots & \alpha^*(Q,Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1N} \\ e_{2N} \\ \vdots \\ e_{QN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Fra likning (4.63) fremgår det at alle modevektorene er ortogonale med hensyn på støyegenvektoren  $\vec{\mathcal{E}}_N$ .

$$\vec{A}^H(r) \cdot \vec{\mathcal{E}}_N = 0 \quad (4.64)$$

Likning (4.64) uttrykker grunnideen i Music algoritmen.

Den laveste egenverdien  $\lambda_{\min}$  kan ha flere egenvektorer tilordnet (multipel  $\lambda$ ).

I et praktisk system med  $Q$  antenneelementer vil kovariansmatrisen  $[\rho]$  inneholder  $Q$  egenverdier og  $Q$  egenvektorer. Hver egenverdi med tilhørende egenvektor er et uttrykk for et mottatt signal. Dersom det mottas  $D$  signaler vil  $\lambda_Q = \sigma^2$  ha en multiplisitet lik  $Q - D$  og  $Q - D$  egenvektorer som representerer støy. I et praktisk system (6) får man avhengig av rangen i matrisen  $[A][P][A]^H$  et knippe av egenverdier for  $[\rho]$  med hver sin egenvektor som grupperer seg rundt  $\sigma^2$ . Spredningen i disse egenverdiene minsker med økende antall sampler som det midles over.

Det vil være  $Q - D$  egenvektorer  $\vec{\mathcal{E}}_{N1}, \vec{\mathcal{E}}_{N2}, \vec{\mathcal{E}}_{N3} \dots$  som representerer støy (se appendiks E).

Likning (4.45) gjelder for alle  $\vec{\mathcal{E}}_{Ni}$ . Man kan derfor danner seg en matrise  $[\mathcal{E}_N]$  hvor støyegenvektorene  $\vec{\mathcal{E}}_{Ni}$  utgjør kolonnene. Likning (4.63) kan modifieres til.

$$\begin{bmatrix} \alpha(1,1) & \alpha(1,2) & \cdots & \alpha(1,D) \\ \alpha(2,1) & \alpha(2,2) & \cdots & \alpha(2,D) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha(Q,1) & \alpha(Q,2) & \cdots & \alpha(Q,D) \end{bmatrix}^H \cdot \begin{bmatrix} e_{1N1} & e_{1N2} & \cdots & e_{1N(Q-D)} \\ e_{2N1} & e_{2N2} & \cdots & e_{2N(Q-D)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ e_{QN1} & e_{QN2} & \cdots & e_{QN(Q-D)} \end{bmatrix} = \quad (4.65)$$

$$[A]^H \begin{bmatrix} \vec{\mathcal{E}}_{N1} & \vec{\mathcal{E}}_{N2} & \cdots & \vec{\mathcal{E}}_{N(Q-D)} \end{bmatrix} = [A]^H [\mathcal{E}_N] = 0$$

Modevektoren til emitter  $r$  (likning (4.46) innsatt i likning (4.51)) kan skrives som:

$$\vec{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \alpha(1, \mathbf{r}) \\ \alpha(2, \mathbf{r}) \\ \vdots \\ \alpha(Q, \mathbf{r}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{j\frac{2\pi}{\lambda}R \cos(0-\theta_r)} \\ e^{j\frac{2\pi}{\lambda}R \cos\left(\frac{2\pi}{Q}-\theta_r\right)} \\ e^{j\frac{2\pi}{\lambda}R \cos\left(\frac{2\pi}{Q}2-\theta_r\right)} \\ \vdots \\ e^{j\frac{2\pi}{\lambda}R \cos\left(\frac{2\pi}{Q}(Q-1)-\theta_r\right)} \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{A}}(\theta_r) \quad (4.66)$$

Fra likning likning (4.65) og likning (4.66) følger at

$$\vec{\mathbf{A}}^H(\mathbf{r})[\mathcal{E}_N] = \vec{\mathbf{A}}^H(\theta_r)[\mathcal{E}_N] = \begin{bmatrix} \alpha(1, \mathbf{r}) \\ \alpha(2, \mathbf{r}) \\ \vdots \\ \alpha(Q, \mathbf{r}) \end{bmatrix}^H \cdot [\mathcal{E}_N] = \quad (4.67)$$

$$\begin{bmatrix} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}R \cos(0-\theta_r)} & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}R \cos\left(\frac{2\pi}{Q}-\theta_r\right)} & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}R \cos\left(\frac{2\pi}{Q}2-\theta_r\right)} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}R \cos\left(\frac{2\pi}{Q}(Q-1)-\theta_r\right)} \end{bmatrix} \cdot [\mathcal{E}_N] = [0]$$

Definerer en funksjon:

$$\Omega(\theta) = \begin{bmatrix} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}R \cos(0-\theta)} & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}R \cos\left(\frac{2\pi}{Q}-\theta\right)} & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}R \cos\left(\frac{2\pi}{Q}2-\theta\right)} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}R \cos\left(\frac{2\pi}{Q}(Q-1)-\theta\right)} \end{bmatrix} [\mathcal{E}_N]$$

$$\Omega(\theta) = \vec{\mathbf{A}}^H(\theta)[\mathcal{E}_N] \quad (4.68)$$

Dersom matrisen  $[\mathcal{E}_N]$  er kjent er også funksjonen  $\Omega(\theta) = \vec{\mathbf{A}}^H(\theta)[\mathcal{E}_N]$  med  $\theta$  som fri variabel definert.

Variere  $\theta$  fra 0 til  $2\pi$  og beregner  $\Omega(\theta)$  i likning (4.68). Fra likning (4.65) fremgår det at  $\Omega(\theta) = 0$  for  $\theta = \theta_r$  ( hvor  $r = 1, 2, \dots, D$  ). Ved å variere  $\theta$  i likning (4.68) kan man bestemme nullpunktene i likning (4.68) og således bestemme retningene til emitterene.

I et praktisk system estimeres matrisen  $[\mathcal{E}_N]$  med en viss unøyaktighet.  $\Omega(\theta)$  blir ikke null, men  $|\Omega(\theta)|$  får en minimumsverdi når  $\theta = \theta_r$ . Tilsvarende får  $|\Omega(\theta)|^2 = \Omega(\theta) \cdot \Omega^*(\theta)$  en minimumsverdi når  $\theta = \theta_r$  og kan benyttes til å bestemme retningene  $\theta_r$  ( $r = 1, 2, \dots, D$ ).

$$|\Omega(\theta)|^2 = \Omega(\theta)\Omega^*(\theta) = \left(\vec{\mathbf{A}}^H(\theta)[\mathcal{E}_N]\right)\left(\vec{\mathbf{A}}^H(\theta)[\mathcal{E}_N]\right)^H = \vec{\mathbf{A}}^H(\theta)[\mathcal{E}_N][\mathcal{E}_N]\vec{\mathbf{A}}(\theta) \quad (4.69)$$

Den inverse funksjonen av likning (4.69) kalles for Music funksjonen  $f_{\text{MUSIC}}$  (6)

$$f_{\text{MUSIC}}(\theta) = \frac{1}{\bar{\mathbf{A}}^H(\theta)[\mathcal{E}_N][\bar{\mathbf{A}}(\theta)} \quad (4.70)$$

$f_{\text{MUSIC}}(\theta)$  benyttes i Music algoritmen til å bestemme retningene  $\theta = \theta_r$  til emitterene hvor ( $r = 1, 2, \dots, D$ ).

#### 4.2.3.2 Implementering av Music algoritmen

Et signal beskrives som:

$$s(\mathbf{q}, \omega_s t) = \text{Re}\{z(\mathbf{q}, \omega_s t)\} = \text{Re}\{C e^{j\omega_s t}\} \quad (4.71)$$

Hvor  $\omega_s$  er signalets vinkelfrekvens.

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \quad (4.72)$$

Inngangsparameterene til Music algoritmen er signalene fra antenneelementene representert på kompleks form  $z(\mathbf{q}, t)$  (likning (4.45)). Kjenner man frekvensen  $\omega_s$  kan et signals komplekse form bestemmes av relasjonen gitt i følgende likning.

$$\begin{aligned} z(\mathbf{q}, t) &= s(\mathbf{q}, \omega_s t) + js(\mathbf{q}, (\omega_s t - \omega_s \tau)) = s(\mathbf{q}, \omega_s t) + js\left(\mathbf{q}, \left(\omega_s t - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \\ & s(\mathbf{q}, \omega_s t) + js\left(\mathbf{q}, \left(t - \frac{T_s}{4}\right)\right) \end{aligned} \quad (4.73)$$

Ved sampling av et signal endres likning (4.73) til:

$$\begin{aligned} z(\mathbf{q}, iT_s) &= s(\mathbf{q}, \omega_s iT_0) + js(\mathbf{q}, (\omega_s iT_0 - \omega_s \tau)) = s(\mathbf{q}, \omega_s iT_0) + js\left(\mathbf{q}, \left(\omega_s iT_0 - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \\ & s(\mathbf{q}, \omega_s iT_0) + js\left(\mathbf{q}, \left(iT_0 - \frac{T_s}{4}\right)\right) \end{aligned} \quad (4.74)$$

Vanligvis vil man kombinere en DFT (Digital Fouriertransformasjon) forut for selve Music al-

goritmen. Ved DFT vil signalet ved en gitt frekvens  $\omega = h \frac{\omega_0}{N}$  bli representert på kompleks form av koeffisientene som representerer signalet i vedkommende frekvensbinne. Dette er illustrert i figur 4-13. Den komplekse koeffisienten som representerer signalet i frekvensbinne  $h$  er  $z\left(q, h \frac{\omega_0}{N}\right)$  (se appendiks (B)). I likning (4.74) er  $\omega_s = h \frac{\omega_0}{N}$ .

For å bestemme Music-funksjonen  $f_{\text{MUSIC}}(\theta) = \frac{1}{\bar{\mathbf{A}}^H(\theta)[\mathcal{E}_N][\mathcal{E}_N]\bar{\mathbf{A}}(\theta)}$  må først matrisen  $[\mathcal{E}_n]$  estimeres. Første trinn i denne prosessen er å bestemme et estimat for kovariansmatrisen  $[\rho]$ .

Figur 4-14 illustrer hvorledes kovariansmatrisen estimeres. Alle signalene fra antenneelementene samples samtidig. Tidsavstanden mellom hver sampling er  $T$ . Tidsintervallet  $T$  skal være så stort at støyen i to samplinger er ukorrelet. Tidsintervallet  $T$  er derfor bestemt av mottakerkanalenes båndbredde.

Signalet på element  $q$  ved tidspunktet  $t = iT$  betegnes  $z(q, iT)$ .

Av samplingsverdiene ved tidspunktet  $t = iT$  dannes matrisen

$$[\Gamma(iT)] = \begin{bmatrix} z(1, iT)z^*(1, iT) & z(1, iT)z^*(2, iT) & \cdots & z(1, iT)z^*(Q, iT) \\ z(2, iT)z^*(1, iT) & z(2, iT)z^*(2, iT) & \cdots & z(2, iT)z^*(Q, iT) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ z(Q, iT)z^*(1, iT) & z(Q, iT)z^*(2, iT) & \cdots & z(Q, iT)z^*(Q, iT) \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

Man gjør  $N$  slike samplinger og danner  $N$  matriser analogt med likning (4.75). Ved å midle matriseelementene over alle matrisene lages et estimat for kovariansmatrisen  $[\hat{\rho}]$  som vist i likning (4.76)

$$[\hat{\rho}] = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{i=N-1} z(1,iT)z^*(1,iT) & \sum_{i=0}^{i=N-1} z(1,iT)z^*(2,iT) & \cdots & \sum_{i=0}^{i=N-1} z(1,iT)z^*(Q,iT) \\ \sum_{i=0}^{i=N-1} z(2,iT)z^*(1,iT) & \sum_{i=0}^{i=N-1} z(2,iT)z^*(2,iT) & \cdots & \sum_{i=0}^{i=N-1} z(2,iT)z^*(Q,iT) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{i=N-1} z(Q,iT)z^*(1,iT) & \sum_{i=0}^{i=N-1} z(Q,iT)z^*(2,iT) & \cdots & \sum_{i=0}^{i=N-1} z(Q,iT)z^*(Q,iT) \end{bmatrix} = \quad (4.76)$$

$$\begin{bmatrix} \overline{z(1)z^*(1)} & \overline{z(1)z^*(2)} & \cdots & \overline{z(1)z^*(Q)} \\ \overline{z(2)z^*(1)} & \overline{z(2)z^*(2)} & \cdots & \overline{z(2)z^*(Q)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \overline{z(Q)z^*(1)} & \overline{z(Q)z^*(2)} & \cdots & \overline{z(Q)z^*(Q)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\rho}(0) & \hat{\rho}(-1) & \cdots & \hat{\rho}(-(Q-1)) \\ \hat{\rho}(1) & \hat{\rho}(0) & \cdots & \hat{\rho}(-(Q-2)) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hat{\rho}(Q-1) & \hat{\rho}(Q-2) & \cdots & \hat{\rho}(0) \end{bmatrix}$$

Eigenverdiene i kovariansmatrisen  $[\hat{\rho}]$  finnes. For å finne disse eigenverdiene må iterative metoder anvendes. Når eigenverdiene er funnet sorteres disse etter synkende rekkefølge.

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots \dots \dots < \lambda_{Q-1} < \lambda_Q$$

I praksis vil man for et antennearray bestående av  $Q$  elementer få  $Q$  eigenverdier. I praksis vil det være slik at eigenverdiene deler seg i to markante grupper (6), en gruppe med lav verdi som samler seg rundt  $\lambda = \sigma^2$  og en gruppe eigenverdier med markert høyere verdi.

Dersom det er  $D$  mottatte signaler vil det være  $D$  eigenverdier med høy verdi (markerer signaler som er signifikant over støynivået) og  $Q-D$  eigenverdier av lav verdi som alle representerer støy.

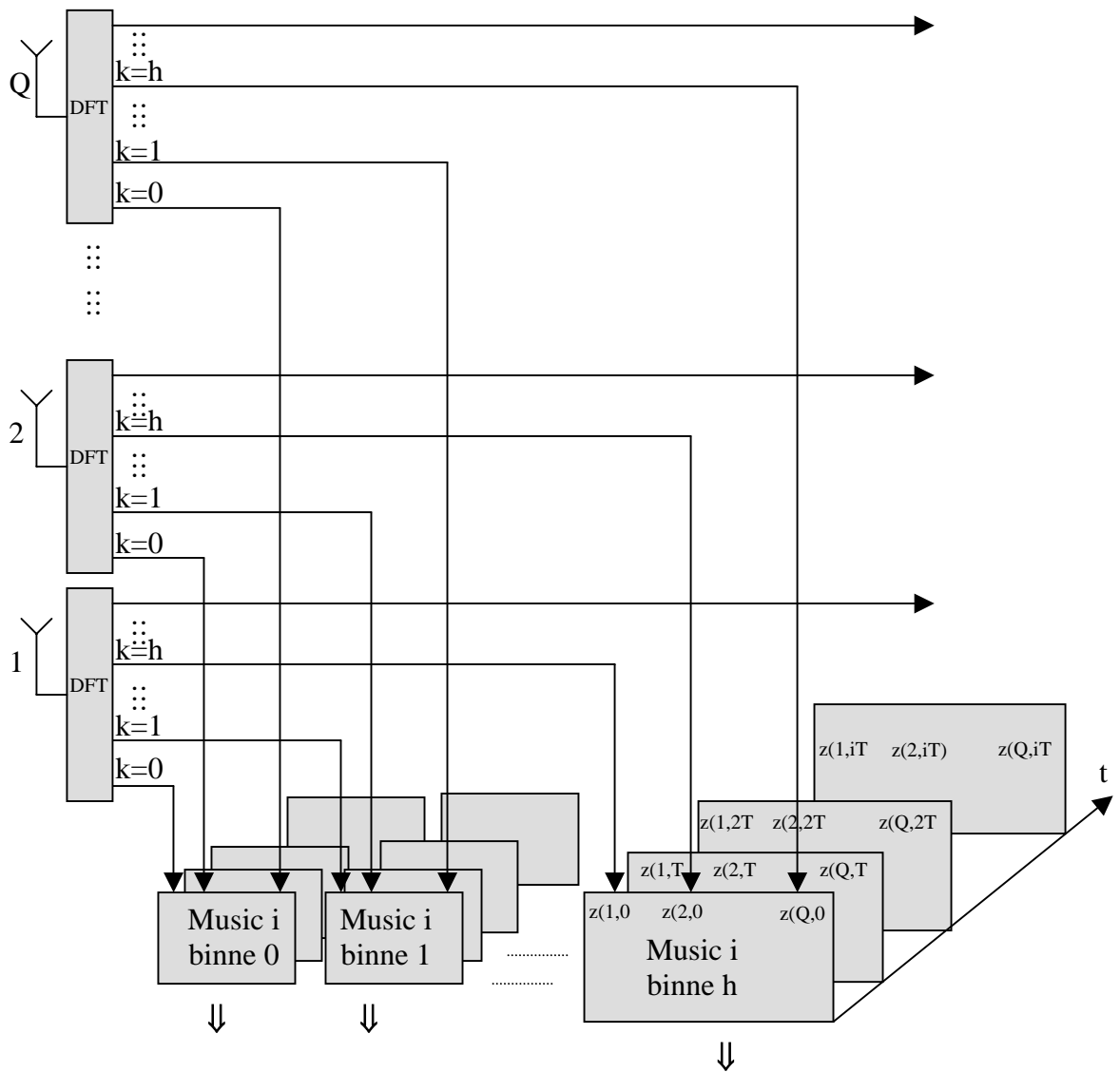
For de lav eigenverdiene som representerer støy finner man de tilhørende egenvektorene:

$$\vec{\mathcal{E}}_{Q-D}, \vec{\mathcal{E}}_{Q-D+1}, \vec{\mathcal{E}}_{Q-D+1} \dots \dots \dots \vec{\mathcal{E}}_Q$$

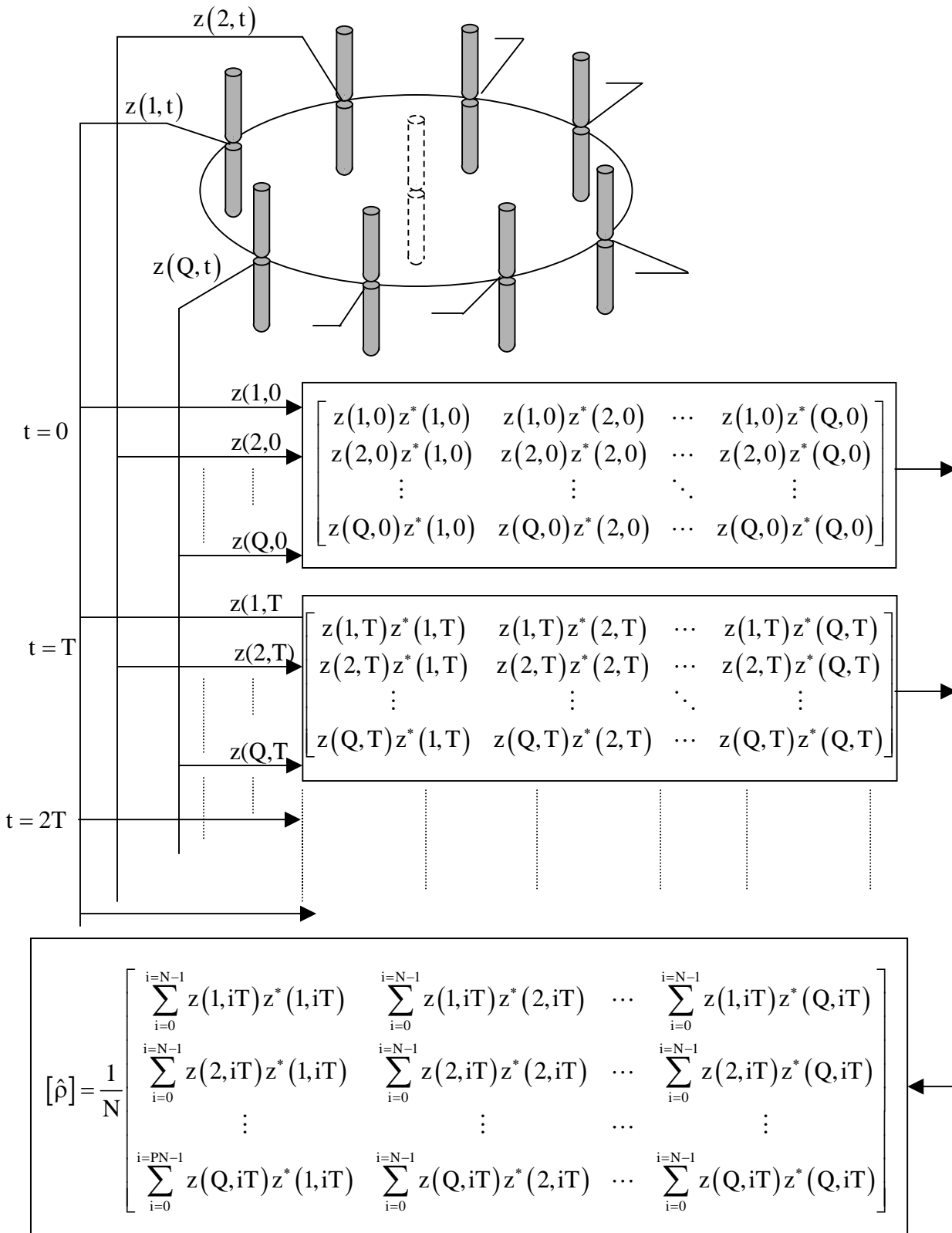
Av disse dannes matrisen  $[\mathcal{E}_N]$ . som substitueres inn i music-funksjonen.

$$f_{\text{MUSIC}}(\theta) = \frac{1}{\vec{A}^H(\theta)[\mathcal{E}_N][\mathcal{E}_N]\vec{A}(\theta)} \text{ og } \theta_r \text{ bestemmes som vist i likning (4.70).}$$





Figur 4-13 Illustrasjon av DFT (digital Fouriertransformasjon) forut for Music algoritmen.

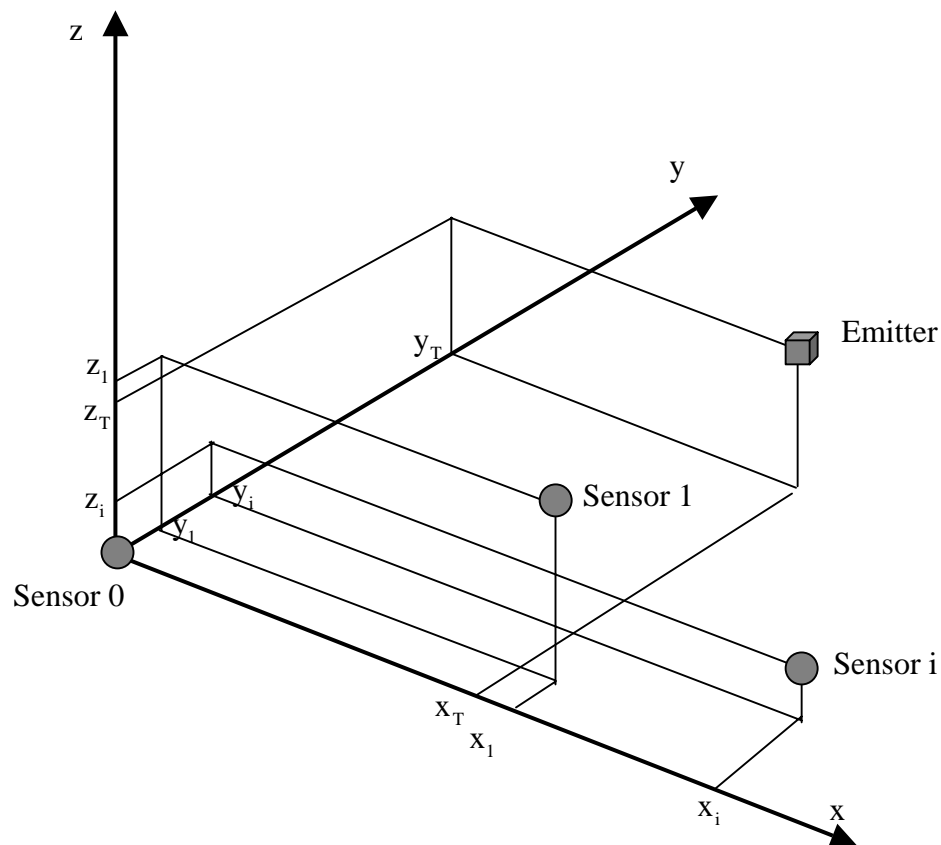


Figur 4-14 Illustrasjon av estimering av kovariansmatrisen  $[\hat{\rho}]$

## 5 HYPERBOLSK POSISJONSBESTEMMELSE

Ved hyperbolsk posisjonsbestemmelse bestemmes en emitters posisjon ved å måle tidsdifferansen i radiobølgenes propagasjonstid fra emitter til et antall sensorer. Tidsdifferansen ved to sensorer representerer differansen i avstand fra emitter til respektive sensorer. Det geometriske sted for de punkter hvis avstand fra sensorene har en konstant differanse er en hyperbel. Emmitterens posisjon må ligge på denne hyperbelen. Dette er illustrert i figur 1-2. Forskjellen mellom TDOA som er beskrevet i kapittel 3.2 og hyperbolsk posisjonsbestemmelse er at ved TDOA er avstanden mellom sensorene svært kort sammenliknet med avstanden til emitteren. Dette gjør at hyperbelen ved TDOA blir en rett linje (en hyperbel har en rett linje som grenseverdi).

Ved hyperbolsk posisjonsbestemmelse måler man tiden når et signal mottas på hver enkelt sensor referert til tidspunktet signalet mottas på en referansesensor. Dette krever synkroniserte klokker på alle sensorene. GPS kan benyttes for synkronisering.



Figur 5-1 Illustrasjon av emitter og sensorers koordinater

For å kunne måle adkomsttidspunktet for et signal, må signalet ha lett i gjenkjennbare karakteristika. Dersom signalet er fra en pulsradar er starten på pulsen et lett gjenkjennbart og definerbart karakteristika. Kommunikasjonssignaler har ikke slike lett gjenkjennbare karakteristika.

En metode er å krysskorrelere signalene som mottas. Dette vil imidlertid stille store krav til kommunikasjonskanalen mellom sensorene (kanalen vil måtte være bredbåndet). Det er kjent at det eksperimenteres med hyperbolsk posisjonsbestemmelse for kommunikasjonsystemer.

For å bestemme en emitters posisjon i rommet trenger man minst 4 sensorer (likning (5.9)). Man kan gjerne benytte flere sensorer. En stor fordel med hyperbolsk posisjonsbestemmelse er at nøyaktigheten forbedres med økende antall sensorer. Desto flere sensorer man har desto mer nøyaktig kan emitterens posisjon bestemmes (likning (5.9)).

I det etterfølgende er det beskrevet en metode for å bestemme en emitters posisjon ved hjelp av hyperbolsk posisjonsbestemmelse, og hvorledes man utnytter redundansen ved bruk av flere sensorer for å bedre nøyaktighet.

Figur 5-1 illustrer posisjonen for en emitter og et antall sensorer definert i et koordinat system. Koordinatsystemets origo plasseres i posisjonen til sensor 0 som defineres som referansesensor.

Posisjonene defineres som følger:

Sensor 0's posisjon er:  $\vec{r}_0 = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$  (origo)

Sensor i's posisjon er:  $\vec{r}_i = x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k}$

Emitterens posisjon er:  $\vec{r}_T = x_T\vec{i} + y_T\vec{j} + z_T\vec{k}$

Avstanden fra emitter til origo er  $|\vec{r}_T|$ .

Avstanden fra emitter til sensor i er:  $|\vec{r}_T - \vec{r}_i|$ .

Tiden signalet bruker fra emitter til sensor 0 betegnes  $t_0$ , tiden signalet bruker fra emitter til sensor i betegnes  $t_i$ .

Ved hyperbolsk posisjonsbestemmelse måles tidsdifferansen  $\Delta t_i$  mellom når signalet mottas på sensor i og sensor 0.

$$\Delta t_i = t_i - t_0 = \frac{1}{c} (|\vec{r}_T - \vec{r}_i| - |\vec{r}_T|) \quad (5.1)$$

$$|\vec{r}_T|^2 = x_T^2 + y_T^2 + z_T^2$$

$$|\vec{r}_T - \vec{r}_i|^2 = (x_T - x_i)^2 + (y_T - y_i)^2 + (z_T - z_i)^2 = x_T^2 - 2x_Tx_i + x_i^2 + y_T^2 - 2y_Ty_i + y_i^2 + z_T^2 - 2z_Tz_i + z_i^2$$

$$|\vec{r}_T - \vec{r}_i|^2 - |\vec{r}_T|^2 = -2x_Tx_i + x_i^2 - 2y_Ty_i + y_i^2 - 2z_Tz_i + z_i^2 \quad (5.2)$$

$$t_0 = \frac{|\vec{r}_T|}{c}$$

$$t_i = t_0 + \Delta t_i = \frac{|\vec{r}_T - \vec{r}_i|}{c}$$

$$|\vec{r}_T|^2 = c^2 t_0^2$$

$$|\vec{r}_T - \vec{r}_i|^2 = c^2 (t_0 + \Delta t_i)^2 = c^2 t_0^2 + c^2 2t_0 \Delta t_i + c^2 \Delta t_i^2$$

Likning (5.2) omformes til:

$$\begin{aligned} c^2 t_0^2 + c^2 2t_0 \Delta t_i + c^2 \Delta t_i^2 - c^2 t_0^2 &= -2x_T x_i + x_i^2 - 2y_T y_i + y_i^2 - 2z_T z_i + z_i^2 \\ c^2 2t_0 \Delta t_i + c^2 \Delta t_i^2 &= -2x_T x_i + x_i^2 - 2y_T y_i + y_i^2 - 2z_T z_i + z_i^2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Avstanden fra emitter til sensor 0 (origo) er:

$$\sqrt{x_T^2 + y_T^2 + z_T^2} = ct_0 \quad (5.4)$$

Likning (5.4) innsatt i likning (5.3) gir

$$\begin{aligned} 2c\Delta t_i \sqrt{x_T^2 + y_T^2 + z_T^2} + c^2 \Delta t_i^2 &= -2x_T x_i + x_i^2 - 2y_T y_i + y_i^2 - 2z_T z_i + z_i^2 \\ x_T x_i + y_T y_i + z_T z_i + c\Delta t_i \sqrt{x_T^2 + y_T^2 + z_T^2} &= -\frac{1}{2}c^2 \Delta t_i^2 + \frac{1}{2}x_i^2 + \frac{1}{2}y_i^2 + \frac{1}{2}z_i^2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

$c$ ,  $\Delta t_i$ ,  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  er alle kjente størrelser.

$$|\vec{r}_T| = \sqrt{x_T^2 + y_T^2 + z_T^2}$$

Definerer:

$$D = \frac{1}{2} \left( x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - (c\Delta t_i)^2 \right) \quad (5.6)$$

Likning (5.5) skrives som

$$x_T x_i + y_T y_i + z_T z_i + c\Delta t_i |\vec{r}_T| = D \quad (5.7)$$

$$\text{Definerer matrisen } [P] = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i & y_i & z_i \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\text{Definerer } \vec{r}_T = \begin{bmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{bmatrix}$$

$$\text{Definerer } \vec{\Delta t} = \begin{bmatrix} \Delta t_1 \\ \Delta t_2 \\ \vdots \\ \Delta t_i \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\text{Definerer } \vec{D} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_i \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - (c\Delta t_1)^2 \right) \\ \frac{1}{2} \left( x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - (c\Delta t_2)^2 \right) \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \left( x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - (c\Delta t_i)^2 \right) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Dersom vi har et antall sensorer kan likning (5.7) skrives på matriseform.

$$[\mathbf{P}] \vec{r}_T + c|\vec{r}_T| \vec{\Delta t} = \vec{D} \quad (5.8)$$

Dersom vi har  $Q$  sensorer (medregnet sensor 0) vil  $[\mathbf{P}]$  være en  $(Q-1) \times 3$  matrise. Likningssettet (5.8) inneholder de 3 ukjente  $x_T$ ,  $y_T$ , og  $z_T$  som kan bestemmes dersom  $Q-1 = 3$  (4 sensorer medregnet sensor 0).

Dersom  $Q-1 > 3$  er likningssettet overbestemt. En metode er å stryke de overflødige likningene. Imidlertid vil man ved å anvende informasjonen fra alle målingene som angitt nedenfor oppnå en mer nøyaktig posisjonsbestemmelse.

$[\mathbf{P}]^T [\mathbf{P}]$  gir en  $3 \times 3$  matrise.

Likning (5.8) multiplisert med  $[\mathbf{P}]^T$  gir:

$$[\mathbf{P}]^T [\mathbf{P}] \vec{r}_T + c|\vec{r}_T| [\mathbf{P}]^T \vec{\Delta t} = [\mathbf{P}]^T \vec{D}$$

$$[\mathbf{P}]^T [\mathbf{P}] \vec{r}_T = [\mathbf{P}]^T \vec{D} - c|\vec{r}_T| [\mathbf{P}]^T \vec{\Delta t}$$

$$\vec{r}_T = \left( [\mathbf{P}]^T [\mathbf{P}] \right)^{-1} [\mathbf{P}]^T \vec{D} - \left( [\mathbf{P}]^T [\mathbf{P}] \right)^{-1} [\mathbf{P}]^T \vec{\Delta t} \cdot c|\vec{r}_T|$$

Definerer

$$[\mathbf{S}] = \left( [\mathbf{P}]^T [\mathbf{P}] \right)^{-1} [\mathbf{P}]^T \quad (5.9)$$

$$\vec{r}_T = [\mathbf{S}] \vec{D} - [\mathbf{S}] \vec{\Delta t} \cdot c|\vec{r}_T| \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned}
\vec{r}_T^T &= \vec{D}^T [\mathbf{S}]^T - \overline{\Delta t}^T [\mathbf{S}]^T \cdot c |\vec{r}_T| \\
|\vec{r}_T|^2 &= \vec{r}_T^T \vec{r}_T = \left( \vec{D}^T [\mathbf{S}]^T - \overline{\Delta t}^T [\mathbf{S}]^T \cdot c |\vec{r}_T| \right) \left( [\mathbf{S}] \vec{D} - [\mathbf{S}] \overline{\Delta t} \cdot c |\vec{r}_T| \right) = \\
&\vec{D}^T [\mathbf{S}]^T [\mathbf{S}] \vec{D} - \vec{D}^T [\mathbf{S}]^T [\mathbf{S}] \overline{\Delta t} \cdot c |\vec{r}_T| - \overline{\Delta t}^T [\mathbf{S}]^T \cdot [\mathbf{S}] \vec{D} c |\vec{r}_T| + \overline{\Delta t}^T [\mathbf{S}]^T [\mathbf{S}] \overline{\Delta t} \cdot c |\vec{r}_T| \cdot c |\vec{r}_T| = \\
|\vec{r}_T|^2 &= \vec{D}^T [\mathbf{S}]^T [\mathbf{S}] \vec{D} - 2 \vec{D}^T [\mathbf{S}]^T [\mathbf{S}] \overline{\Delta t} \cdot c |\vec{r}_T| + \overline{\Delta t}^T [\mathbf{S}]^T [\mathbf{S}] \overline{\Delta t} \cdot c^2 |\vec{r}_T|^2
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Da uttrykkene  $\vec{D}^T [\mathbf{S}]^T [\mathbf{S}] \vec{D}$ ,  $\vec{D}^T [\mathbf{S}]^T [\mathbf{S}] \overline{\Delta t}$  og  $\overline{\Delta t}^T [\mathbf{S}]^T [\mathbf{S}] \overline{\Delta t}$  alle uttrykker skalare størrelser (henholdsvis kvadratisk-, bi-lineær- og kvadratisk form) kan følgende defineres.

$$\begin{aligned}
\vec{D}^T [\mathbf{S}]^T [\mathbf{S}] \vec{D} &= A \\
\vec{D}^T [\mathbf{S}]^T [\mathbf{S}] \overline{\Delta t} &= B \\
\overline{\Delta t}^T [\mathbf{S}]^T [\mathbf{S}] \overline{\Delta t} \cdot c^2 &= C
\end{aligned}$$

Likning (5.11) kan skrives på formen:

$$\begin{aligned}
|\vec{r}_T| &= A - 2B |\vec{r}_T| + C |\vec{r}_T|^2 \\
(1 - C) |\vec{r}_T|^2 + 2B |\vec{r}_T| - A &= 0
\end{aligned} \tag{5.12}$$

$|\vec{r}_T|$  løses av likning (5.12). Da likning (5.12) er en likning av annen grad gir den to løsninger. Vanligvis er den ene løsningen negativ (1) og kan forkastet

Når  $|\vec{r}_T|$  er funnet er  $\vec{r}(t) = x_T \vec{i} + y_T \vec{j} + z_T \vec{k}$  bestemt av likning (5.10).

## 6 OPPSUMMERING

Kommunikasjonsutstyr har vært de viktigste emittere å lokalisere i et Hær-scenario. Også i fremtiden vil kommunikasjonsutstyr være et hovedmål for emitterlokalisering. Metoder for bakkebasert emitterlokalisering har til nå vært krysspeiling. Dette synes å være den mest aktuelle metoden også i overskuelig fremtid.

Hyperbolsk posisjonsbestemmelse kan muligens etter hvert vise seg som en metode som gir svært presis lokalisering, men den krever minst tre sensorer for posisjonsbestemmelse i planet og fire sensorer for posisjonsbestemmelse i rommet, mens man ved krysspeiling kan nøye seg med to sensorer for krysspeiling både i planet og i rommet. For taktiske bakkebaserte peileutstyr er det faktum at man ved krysspeiling trenger færre sensorbærende plattformer enn ved hyperbolsk posisjonsbestemmelse et sterkt argument til fordel for konvensjonell krysspeiling, både

med hensyn til kostnader, seighet og fleksibilitet.

Frem til mikroprosessorens gjennombrudd rundt 1980 var Watson-Watt peileren det dominerende peileprinsippet for frekvenser under 1 GHz. Ved hjelp av mikroprosessorer og moderne digitalteknikk ble det mulig å måle forskjeller i fasevinkler mellom signaler på en mer direkte og presis måte. Det ble utviklet en ny generasjon peilere som var i stand til å gjøre svært presise peilinger (kapitel 3.1.1). Dette peileprinsippet blir ofte betegnet som "correlative interferometri". Dette er et peileprinsipp som noen av de ledene produsentene av taktiske peileutstyr synes å satse på.

Etter hvert som digitalteknikken har utviklet seg er det blitt mulig å lage filterbank mottakere basert på DFT (digital Fouriertransformasjon) med de fordeler slike mottakere har ved overvåking av et bredt spektrum. Dersom man først implementerer en filterbank mottaker basert på DFT vil det være naturlig å kombinere en slik mottaker med en peiler hvor fasevinkler bestemmes i frekvensplanet. Dette prinsippet er beskrevet i kapitel 3.1.2.

Peileprinsipper basert på direkte måling av fasevinkel (se kapitel 3.1.1 og 3.1.2) gir presise peilinger. Peilemetodene baserer seg i prinsippet på å sammenlikne faseforskyvningen mellom 2 elementer i et array når et signal mottas. For peilere som skal bestemme en retning i 3 dimensjoner sammenliknes faseforskjellen mellom 3 elementer.

Svakheten ved peilemetodene som sammenlikner fasen på 2 antenneelementer er at de kun kan peile et signal om gangen. Man er derfor fullt og helt avhengig av å diskriminere på frekvens. I kupert terreng vil flerbaner gi peilefeil. I tette signal scenarier kan "interferenter" gi peilefeil. "Beamforming" er en metode som kan peile flere retninger samtidig og eliminere virkningen fra flerbaner (kapitel 4.2.1), dessverre har denne metoden dårlig oppløsning. Fordelen er at den gir mulighet for rolig korrelasjon, noe som øker følsomheten for deteksjon av svake signaler.

"Music" metoden (kapitel 4.2.3) er en metode som kan retningsbestemme flere signaler samtidig. "Music" metoden gir også presis retningsbestemmelse. Metoden baserer seg på korrelasjon mellom antenneelementer, noe som gir god følsomhet. Ulempen er at metoden forutsetter at signalene som skal retningsbestemmes er ukorrelerte, noe som gjør at metoden har svakheter ved oppløsning av flerbaner.

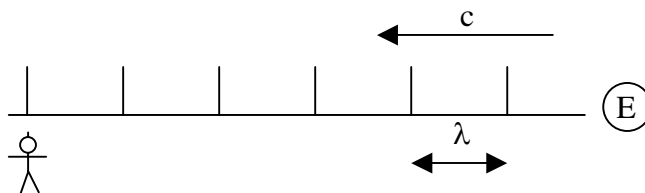


## APPENDIKS

### A. DOPPLER-EFFEKTEN

Det genereres et signal med periode  $T$  som stråles ut fra en emitter med propagasjonshastigheten  $c$ . Dersom emitteren eller en observatør beveger seg og har en hastighetskomponent parallelt med signalets propagasjonsretning vil signalet slik observatøren oppfatter det, ha en annen frekvens enn signalet som sendes ut fra emitteren. Dette fenomenet kalles dopplereffekten.

#### A.1 Stillestående emitter og stillestående observatør



Figur A 1 En stillestående generator produserer et pulstog.

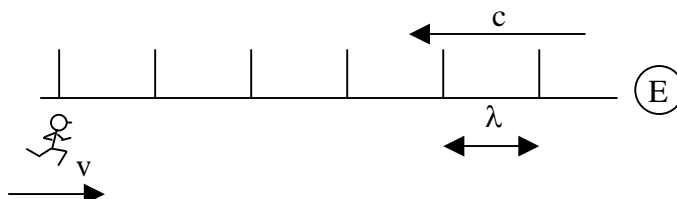
Tiden mellom hver puls er  $T$ .

Antall pulser generert pr sekund er:  $f = \frac{1}{T}$

Bølgelengden  $\lambda = cT$

Tid mellom hver observert puls:  $T = \frac{\lambda}{c}$  og frekvensen  $f = \frac{1}{T}$

#### A.2 Stillestående emitter med observatør i bevegelse



Figur A 2 En observatør beveger seg med hastigheten  $v$  mot emitteren.

Tiden mellom hver puls er  $T$ .

I tiden fra første til andre puls er blitt observert har observatøren beveget seg  $\Delta s = v \cdot T$ .

Observert bølgelengde:  $\hat{\lambda} = \lambda - \Delta s$

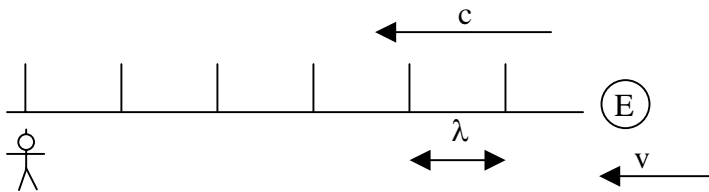
$$\begin{aligned} \text{Tid mellom hver observert puls: } \hat{T} &= \frac{\lambda - \Delta s}{c} \\ c \cdot \hat{T} &= \lambda - \Delta s = \lambda - v\hat{T} \\ \hat{T} &= \frac{\lambda}{c + v} \end{aligned}$$

$$\text{Antall observerte pulser pr sekund: } \hat{f} = \frac{1}{\hat{T}} = \frac{c + v}{\lambda} = \frac{c}{\lambda} + \frac{v}{\lambda}$$

Dopplershiftet:

$$f_d = \hat{f} - f = \frac{c}{\lambda} + \frac{v}{\lambda} - \frac{c}{\lambda} = \frac{v}{\lambda} \quad (\text{A.1})$$

### A.3 Emitter i bevegelse med stillestående observatør



Figur A 3 Emitteren beveger seg med hastigheten  $v$  mot observatør

Tiden mellom hver puls er  $T$ .

I tiden fra første til andre puls har blitt utsendt har emitteren beveget seg  $\Delta s = vT$

Bølgelengden  $\hat{\lambda} = \lambda - vT$

En stillestående observatør observerer bølgelengden  $\hat{\lambda} = \lambda - vT$

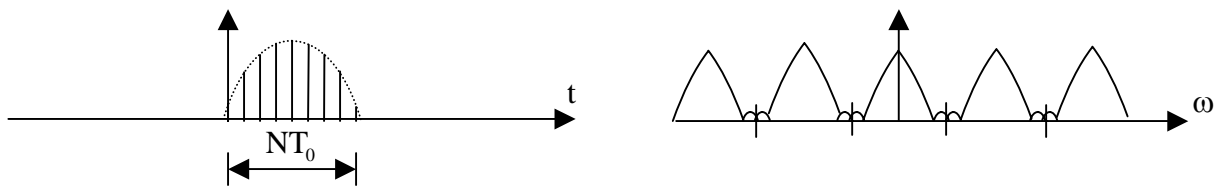
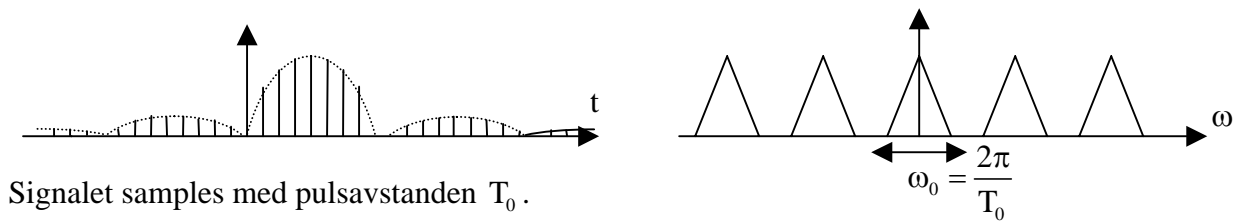
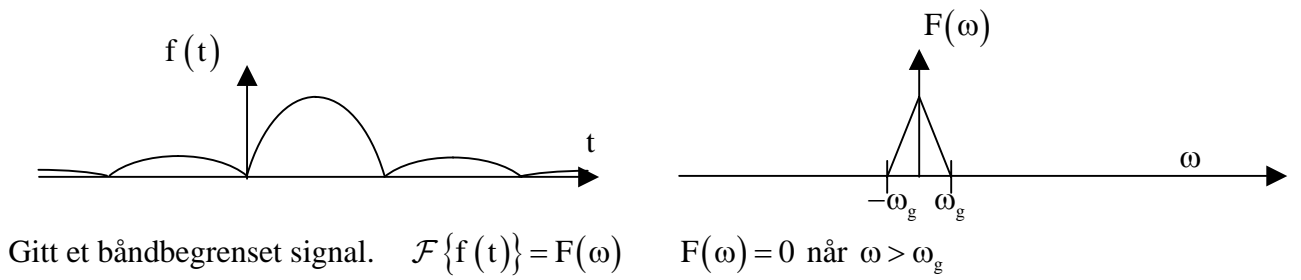
En stillestående observatør observerer følgende tid mellom pulsene:  $\hat{T} = \frac{\hat{\lambda}}{c}$

En stillestående observatør observerer følgende frekvens:  $\hat{f} = \frac{1}{\hat{T}} = \frac{c}{\lambda - vT}$

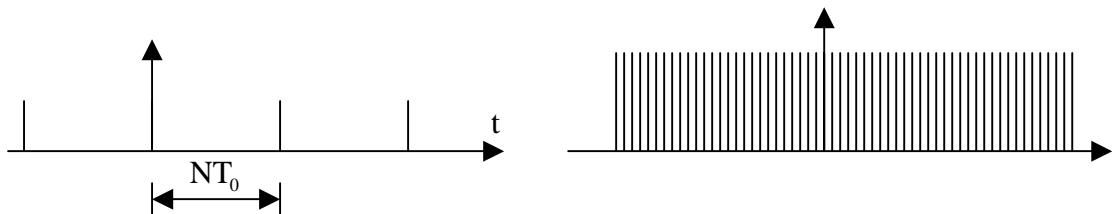
Dopplershiftet:

$$\begin{aligned} f_d = \hat{f} - f &= \frac{1}{\hat{T}} - \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda - vT} - \frac{c}{\lambda} = \frac{c\lambda}{(\lambda - vT)\lambda} - \frac{c(\lambda - vT)}{(\lambda - vT)\lambda} = \frac{c\lambda - c\lambda + cvT}{(\lambda - vT)\lambda} \\ &= \frac{cvT}{(\lambda - vT)\lambda} = \frac{v\lambda}{(\lambda - vT)\lambda} = \frac{v}{\lambda - vT} = \frac{v}{\hat{\lambda}} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

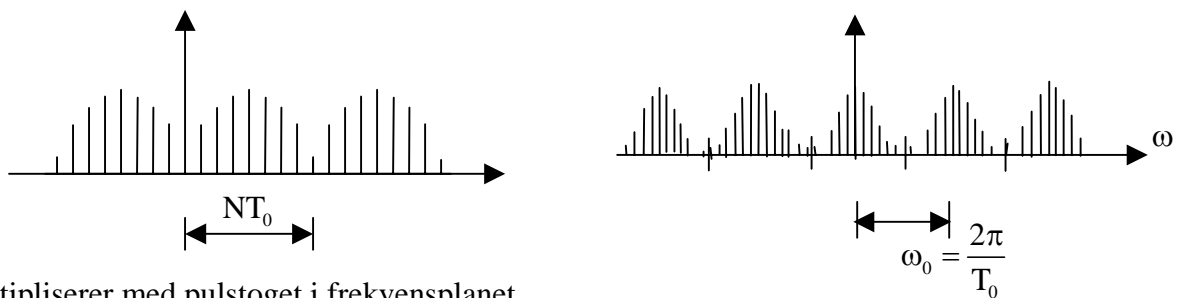
## B DIGITAL FOURIER-TRANSFORM



Multiplikasjon med en vindusfunksjon i tidsplanet gir folding i frekvensplanet.



Folder med et pulstog i tidsplanet slik at man også får et pulstog i frekvensplanet.



Multipliserer med pulstog i frekvensplanet.

Figur B 1 Illustrasjon av resonnementet for den digitale Fouriertransformen

Figur B 1 illustrer resonnementet i den digitale Fouriertransformen. Forutsetningen er at signalet  $f(t)$  er båndbegrenset med båndbredden  $\omega_g$  det vil si at  $F(\omega) = 0$  når  $\omega > 0$ . Et signal som er båndbegrenset i frekvensplanet har uendelig varighet i tidsplanet.

Signalet samples hvor tidsavstanden mellom hvert sampel er  $T_0$ . Det forutsettes videre at  $(2\pi)/T_0 > 2\omega_g$

Da det er umulig å sample et signal fra  $-\infty$  til  $\infty$  må signalet tidsbegrenses i tidsplanet. Signalet multipliseres med en vindusfunksjon. Etter multiplikasjon med vindusfunksjonen er tidsfunksjonen representert med en tallfølge bestående av  $N$  sampler. En slik representasjon i tidsplanet kan behandles i en datamaskin. En multiplikasjon i tidsplanet er en folding i frekvensplanet. Foldingen medfører forvrengning, derfor er det viktig å finne en vindusfunksjon som raskt synker til 0 i frekvensplanet.

Da vi i en datamaskin må representere den Fouriertransformerte som en følge av komplekse tall, gjøres det folding i tidsplanet med et pulstog hvor avstanden mellom pulsene er  $NT_0$ . Resultatet av foldingen gir en periodisk følge av komplekse tall i frekvensplanet. Følgen består av forskjellige komplekse tall  $(N-1)/2$  som representerer den digitale Fouriertransformen i frekvensområdet  $-\frac{\omega_0}{2} < \omega < \frac{\omega_0}{2}$ .

Den digitale Fourier-transformen kan defineres som følger (4):

$$\text{Den digitale Fouriertransformerte: } F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT) e^{-jk \frac{2\pi}{NT} nT} = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT) e^{-jk \frac{\omega_0}{N} nT} \quad (\text{B.1})$$

$$\text{Den digitale inverse transformen: } f(nT) = \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{j \frac{2\pi k}{NT} nT} = \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{j \frac{\omega_0 k}{N} nT} \quad (\text{B.2})$$

Ved den digitale Fouriertransformen representeres frekvensspekteret av tallfølge  $\{F(k)\}$  bestående av komplekse tall. Det komplekse tallet  $F(k)$  representerer Fourier-spekteret i området

$$k \frac{\omega_0}{N} - \frac{\omega_0}{2N} < \omega < k \frac{\omega_0}{N} + \frac{\omega_0}{2N} \quad (\text{B.3})$$

Et slikt delområde av spekteret som definert i likning (B.3) kalles en frekvensbinne.

### C PRONY'S METODE VED ET VILKÅRLIG LANGT LINEÆRT ARRAY.

I kapitel 4.2.2 er Pronys metode for et lineært array med 4 elementer beskrevet. Prinsippet kan generaliseres til et array bestående av  $2M$  elementer nummerert fra 0 til  $2M-1$ . Antar at arrayet mottar  $N$  samtidige signaler. Dersom  $N \leq M$  kan retningen til signalkildene bestemmes. Et array bestående av  $2M$  elementer kan retningsbestemme opptil  $M$  kilder.

Antar at det på referanse elementet mottas  $N$  signaler som betegnes som følger.

$$A_1 e^{j\omega t} = c_1, \quad A_2 e^{j\omega t} = c_2, \quad A_3 e^{j\omega t} = c_3 \dots \dots \dots A_N e^{j\omega t} = c_N$$

På elementene 0 -  $2M-1$  mottas signalene :

$$\begin{aligned} S_0(\omega t) &= \text{Re} \left\{ A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{j\omega t} + \dots \dots \dots + A_N e^{j\omega t} \right\} \\ S_1(\omega t) &= \text{Re} \left\{ A_1 e^{j\omega t} e^{j\left(\frac{d}{c} \cos \theta_1\right)} + \dots \dots \dots + A_N e^{j\omega t} e^{j\left(\frac{d}{c} \cos \theta_N\right)} \right\} \\ S_2(\omega t) &= \text{Re} \left\{ A_1 e^{j\omega t} e^{j\left(\frac{d}{c} \cos \theta_1\right)^2} + \dots \dots \dots + A_N e^{j\omega t} e^{j\left(\frac{d}{c} \cos \theta_N\right)^2} \right\} \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ S_{2M-1}(\omega t) &= \text{Re} \left\{ A_1 e^{j\omega t} e^{j\left(\frac{d}{c} \cos \theta_1\right)^{(2M-1)}} \dots \dots A_N e^{j\omega t} e^{j\left(\frac{d}{c} \cos \theta_N\right)^{(2M-1)}} \right\} \end{aligned} \tag{C.1}$$

De komplekse uttrykkene  $x(0), x(1), x(2), \dots \dots x(2M-1)$  for mottatte signal på antenneelementene kan bestemmes av likningssettet (C.2)

$$\begin{aligned} x(0) &= S_0(\omega t) + jS_0\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ x(1) &= S_1(\omega t) + jS_1\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ x(2) &= S_2(\omega t) + jS_2\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ x(2M-1) &= S_{2M-1}(\omega t) + jS_{2M-1}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \tag{C.2}$$

Fra likningssettene (C.1) og (C.2) følger:

$$\begin{aligned}
x(0) &= A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{j\omega t} + \dots + A_N e^{j\omega t} = c_1 + c_2 + \dots + c_N & (C.3) \\
x(1) &= A_1 e^{j\omega t} e^{j\left(\frac{d}{c} \cos \theta_1\right)} + \dots + A_N e^{j\omega t} e^{j\left(\frac{d}{c} \cos \theta_N\right)} = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \dots + c_N z_N \\
x(2) &= A_1 e^{j\omega t} e^{j\left(\frac{d}{c} \cos \theta_1\right)^2} + \dots + A_N e^{j\omega t} e^{j\left(\frac{d}{c} \cos \theta_N\right)^2} = c_1 z_1^2 + c_2 z_2^2 + \dots + c_N z_N^2 \\
&\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x(2M-1) &= A_1 e^{j\omega t} e^{j\left(\frac{d}{c} \cos \theta_1\right)^{(2M-1)}} + \dots + A_N e^{j\omega t} e^{j\left(\frac{d}{c} \cos \theta_N\right)^{(2M-1)}} = c_1 z_1^{(2M-1)} + \dots + c_N z_N^{(2M-1)}
\end{aligned}$$

Definerer  $N$  konstanter  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_N$  slik at følgende betingelser er oppfylt.

$$\begin{aligned}
a_N x(0) + a_{N-1} x(1) + \dots + a_2 x(N-2) + a_1 x(N-1) &= x(M) & (C.4) \\
a_N x(1) + a_{N-1} x(2) + \dots + a_2 x(N-1) + a_1 x(N) &= x(M+1) \\
a_N x(2) + a_{N-1} x(3) + \dots + a_2 x(N) + a_1 x(N+1) &= x(M+2) \\
&\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_N x(M-1) + a_{N-1} x(M) + \dots + a_2 x(M+N-3) + a_1 x(M+N-2) &= x(2M-1)
\end{aligned}$$

Likning (C.4) skrives på matriseform som:

$$\begin{bmatrix} x(N-1) & \vdots & x(1) & x(0) \\ x(N) & x(N-1) & \vdots & x(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x(M+N-2) & \vdots & x(M) & x(M-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(M) \\ x(M+1) \\ \vdots \\ x(2M-1) \end{bmatrix} \quad (C.5)$$

Dersom  $N = M$  omformes likning (C.5) til:

$$\begin{bmatrix} x(M-1) & \vdots & x(1) & x(0) \\ x(M) & x(M-1) & \vdots & x(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x(2M-2) & \vdots & x(M) & x(M-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{M-1} \\ a_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(M) \\ x(M+1) \\ \vdots \\ x(2M-1) \end{bmatrix} \quad (C.6)$$

Konstantene  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_M$  bestemmes

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{M-1} \\ a_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(M-1) & \vdots & x(1) & x(0) \\ x(M) & x(M-1) & \vdots & x(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x(2M-2) & \vdots & x(M) & x(M-1) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x(M) \\ x(M+1) \\ \vdots \\ x(2M-1) \end{bmatrix} \quad (C.7)$$

Likning (C.3) kombinert med likning (C.6) gir følgende.

$$\begin{aligned}
& x(M-1)a_1 + x(M-2)a_2 + \dots + x(2)a_{M-2} + x(1)a_{M-1} + x(0)a_M - x(M) = \\
& (c_1 z_1^{M-1} + c_2 z_2^{M-1} + \dots + c_M z_M^{M-1})a_1 + (c_1 z_1^{M-2} + c_2 z_2^{M-2} + \dots + c_M z_M^{M-2})a_2 + \dots \\
& + (c_1 z_1^3 + c_2 z_2^3 + \dots + c_M z_M^3)a_{M-3} \\
& + (c_1 z_1^2 + c_2 z_2^2 + \dots + c_M z_M^2)a_{M-2} + (c_1 z_1 + c_2 z_2 + \dots + c_M z_M)a_{M-1} + (c_1 + c_2 + \dots + c_M)a_M \\
& - (c_1 z_1^M + c_2 z_2^M + \dots + c_M z_M^M) = \\
& c_1 \sum_{i=0}^{M-1} (-z_1^M + a_{M-i} z_1^i) + c_2 \sum_{i=0}^{M-1} (-z_2^M + a_{M-i} z_2^i) + \dots + c_M \sum_{i=0}^{M-1} (-z_M^M + a_{M-i} z_M^i) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x(M)a_1 + x(M-1)a_2 + \dots + x(3)a_{M-2} + x(2)a_{M-1} + x(1)a_M - x(M+1) = \\
& (c_1 z_1^M + c_2 z_2^M + \dots + c_M z_M^M)a_1 + (c_1 z_1^{M-1} + c_2 z_2^{M-1} + \dots + c_M z_M^{M-1})a_2 + \dots \\
& + (c_1 z_1^4 + c_2 z_2^4 + \dots + c_M z_M^4)a_{M-3} \\
& + (c_1 z_1^3 + c_2 z_2^3 + \dots + c_M z_M^3)a_{M-2} + (c_1 z_1^2 + c_2 z_2^2 + \dots + c_M z_M^2)a_{M-1} + (c_1 z_1 + c_2 z_2 + \dots + c_M z_M)a_M \\
& - c_1 z_1^{M+1} - c_2 z_2^{M+1} - \dots - c_M z_M^{M+1} = \\
& z_1 c_1 \sum_{i=0}^{M-1} (-z_1^M + a_{M-i} z_1^i) + z_2 c_2 \sum_{i=0}^{M-1} (-z_2^M + a_{M-i} z_2^i) + \dots + z_M c_M \sum_{i=0}^{M-1} (-z_M^M + a_{M-i} z_M^i) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x(M+1)a_1 + x(M)a_2 + \dots + x(4)a_{M-2} + x(3)a_{M-1} + x(2)a_M - x(M+2) = \\
& (c_1 z_1^{M+1} + c_2 z_2^{M+1} + \dots + c_M z_M^{M+1})a_1 + (c_1 z_1^M + c_2 z_2^M + \dots + c_M z_M^M)a_2 + \dots + (c_1 z_1^5 + c_2 z_2^5 + \dots + c_M z_M^5)a_{M-3} + \\
& (c_1 z_1^4 + c_2 z_2^4 + \dots + c_M z_M^4)a_{M-2} + (c_1 z_1^3 + c_2 z_2^3 + \dots + c_M z_M^3)a_{M-1} + (c_1 z_1^2 + c_2 z_2^2 + \dots + c_M z_M^2)a_M \\
& - (c_1 z_1^{M+2} + c_2 z_2^{M+2} + \dots + c_M z_M^{M+2}) = \\
& z_1^2 c_1 \sum_{i=0}^{M-1} (-z_1^M + a_{M-i} z_1^i) + z_2^2 c_2 \sum_{i=0}^{M-1} (-z_2^M + a_{M-i} z_2^i) + \dots + z_M^2 c_M \sum_{i=0}^{M-1} (-z_M^M + a_{M-i} z_M^i) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
& x(2M-2)a_1 + x(2M-3)a_2 + \dots + x(M+1)a_{M-2} + x(M)a_{M-1} + x(M-1)a_M - x(2M-1) = \\
& (c_1 z_1^{2M-2} + c_2 z_2^{2M-2} + \dots + c_M z_M^{2M-2})a_1 + (c_1 z_1^{2M-3} + c_2 z_2^{2M-3} + \dots + c_M z_M^{2M-3})a_2 + \dots \\
& + (c_1 z_1^{M+1} + c_2 z_2^{M+1} + \dots + c_M z_M^{M+1})a_{M-2} + (c_1 z_1^M + c_2 z_2^M + \dots + c_M z_M^M)a_{M-1} + \\
& (c_1 z_1^{M-1} + c_2 z_2^{M-1} + \dots + c_M z_M^{M-1})a_M - (c_1 z_1^{2M-1} + c_2 z_2^{2M-1} + \dots + c_M z_M^{2M-1}) = \\
& z_1^{M-1} c_1 \sum_{i=0}^{M-1} (-z_1^M + a_{M-i} z_1^i) + z_2^{M-1} c_2 \sum_{i=0}^{M-1} (-z_2^M + a_{M-i} z_2^i) + \dots + z_M^{M-1} c_M \sum_{i=0}^{M-1} (-z_M^M + a_{M-i} z_M^i) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \sum_{i=0}^{M-1} (-z_1^M + a_{M-i} z_1^i) + c_2 \sum_{i=0}^{M-1} (-z_2^M + a_{M-i} z_2^i) + \dots + c_M \sum_{i=0}^{M-1} (-z_M^M + a_{M-i} z_M^i) = 0 \\
& z_1 c_1 \sum_{i=0}^{M-1} (-z_1^M + a_{M-i} z_1^i) + z_2 c_2 \sum_{i=0}^{M-1} (-z_2^M + a_{M-i} z_2^i) + \dots + z_M c_M \sum_{i=0}^{M-1} (-z_M^M + a_{M-i} z_M^i) = 0 \\
& z_1^2 c_1 \sum_{i=0}^{M-1} (-z_1^M + a_{M-i} z_1^i) + z_2^2 c_2 \sum_{i=0}^{M-1} (-z_2^M + a_{M-i} z_2^i) + \dots + z_M^2 c_M \sum_{i=0}^{M-1} (-z_M^M + a_{M-i} z_M^i) = 0 \\
& \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
& z_1^{M-1} c_1 \sum_{i=0}^{M-1} (-z_1^M + a_{M-i} z_1^i) + z_2^{M-1} c_2 \sum_{i=0}^{M-1} (-z_2^M + a_{M-i} z_2^i) + \dots + z_M^{M-1} c_M \sum_{i=0}^{M-1} (-z_M^M + a_{M-i} z_M^i) = 0
\end{aligned} \tag{C.8}$$

Løsning av likningene (C.8) krever at følgende betingelser er oppfylt

$$\sum_{i=0}^{M-1} (-z_r^M + a_{M-i} z_r^i) = 0 \text{ hvor } z_r \text{ er en rot i polynomet} \tag{C.9}$$

Eller skrevet på vanlig form:

$$z^M - \sum_{i=0}^{M-1} a_{M-i} z^i = 0 \tag{C.10}$$

Likning (C.10) kalles *Prony's betingelse*

Røttene  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_r, \dots, z_M$  i likning C.10 kan finnes ved hjelp av iterative metoder.

Da  $z_r = e^{j \frac{d}{c} \cos \theta_r}$  (se likning C.3) kan retningene  $\theta_r$  bestemmes.

Dersom  $N < M$  er likning (C.5) overbestemt.

$$\begin{bmatrix} x(N-1) & \vdots & x(1) & x(0) \\ x(N) & x(N-1) & \vdots & x(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x(M+N-2) & \vdots & x(M) & x(M-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(M) \\ x(M+1) \\ \vdots \\ x(2M-1) \end{bmatrix} \tag{C.5}$$

Ekstra informasjonen i likning (C.5) når den er overbestemt, utnyttes til å bedre retningsbestemmelse. Begge sider av likning (C.5) multipliseres med  $[X]^H$  slik av man får en korrelasjonslikning.



$$\begin{bmatrix} x^*(N-1) & x^*(N) & \vdots & x^*(M+N-2) \\ \vdots & x^*(N-1) & \vdots & \vdots \\ x^*(1) & \vdots & \vdots & x^*(M) \\ x^*(0) & x^*(1) & \vdots & x^*(M-1) \end{bmatrix}. \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{bmatrix} x(N-1) & \vdots & x(1) & x(0) \\ x(N) & x(N-1) & \vdots & x(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x(M+N-2) & \vdots & x(M) & x(M-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} x^*(N-1) & x^*(N) & \vdots & x^*(M+N-2) \\ \vdots & x^*(N-1) & \vdots & \vdots \\ x^*(1) & \vdots & \vdots & x^*(M) \\ x^*(0) & x^*(1) & \vdots & x^*(M-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(M) \\ x(M+1) \\ \vdots \\ x(2M-1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{i=M-1} x^*(N-1+i)x(N-1+i) & \sum_{i=0}^{i=M-1} x^*(N-1+i)x(N-2+i) & \cdots & \sum_{i=0}^{i=M-1} x^*(N-1+i)x(i) \\ \sum_{i=0}^{i=M-1} x^*(N-2+i)x(N-1+i) & \sum_{i=0}^{i=M-1} x^*(N-2+i)x(N-2+i) & \cdots & \sum_{i=0}^{i=M-1} x^*(N-2+i)x(i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{i=M-1} x^*(i)x(N-1+i) & \sum_{i=0}^{i=M-1} x^*(i)x(N-2+i) & \cdots & \sum_{i=0}^{i=M-1} x^*(i)x(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{i=M-1} x^*(N-1+i)x(M+i) \\ \sum_{i=0}^{i=M-1} x^*(N-2+i)x(M+i) \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{i=M-1} x^*(i)x(M+i) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \rho_x(0) & \rho_x(-1) & \cdots & \rho_x(-(N-1)) \\ \rho_x(1) & \rho_x(0) & \cdots & \rho_x(-(N-2)) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_x(N-1) & \rho_x(N-2) & \cdots & \rho_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_x(M-(N-1)) \\ \rho_x(M-(N-2)) \\ \vdots \\ \rho_x(M-(N-N)) \end{bmatrix} \quad (\text{C.12})$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_x(0) & \rho_x(-1) & \cdots & \rho_x(-(N-1)) \\ \rho_x(1) & \rho_x(0) & \cdots & \rho_x(-(N-2)) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_x(N-1) & \rho_x(N-2) & \cdots & \rho_x(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \rho_x(M-(N-1)) \\ \rho_x(M-(N-2)) \\ \vdots \\ \rho_x(M-(N-N)) \end{bmatrix} \quad (\text{C.13})$$

Konstantene  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_N$  kan nå bestemmes av likning (C.13).

Man kan nå erstatte  $N$  med  $M$  i likning (C.8). Prony's betingelse fremkommer nå på samme måte som i likning (C.10)

$$z^N - \sum_{i=0}^{N-1} a_{N-i} z^i = 0 \quad (\text{C.14})$$

## D KOVARIANSMATRISENS MINSTE EGENVERDI I MUSIC ALGORITMEN

Som vist i likning (4.54) i kapitel 4.2.3.1 er kovariansmatrisen for signalene mottatt på antennearrayet i Music algoritmen som følger.

$$[\rho] = E \left[ [A] \bar{F} \cdot \bar{F}^H [A]^H \right] + [I] \sigma^2 \quad (\text{D.1})$$

Betegner :

$$[A] \bar{F} = \bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_Q \end{bmatrix}$$

$$E \left[ \bar{\Phi} \cdot \bar{\Phi}^* \right] = E \left[ \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^* & \phi_2^* & \cdots & \phi_Q^* \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} E[\phi_1 \phi_1^*] & E[\phi_1 \phi_2^*] & \cdots & E[\phi_1 \phi_Q^*] \\ E[\phi_2 \phi_1^*] & E[\phi_2 \phi_2^*] & \cdots & E[\phi_2 \phi_Q^*] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E[\phi_Q \phi_1^*] & E[\phi_Q \phi_2^*] & \cdots & E[\phi_Q \phi_Q^*] \end{bmatrix}$$

Likning (D.1) omformes til:

$$[\rho] = \begin{bmatrix} E[\phi_1\phi_1^*] + \sigma^2 & E[\phi_1\phi_2^*] & \cdots & E[\phi_1\phi_Q^*] \\ E[\phi_2\phi_1^*] & E[\phi_2\phi_2^*] + \sigma^2 & \cdots & E[\phi_2\phi_Q^*] \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ E[\phi_Q\phi_1^*] & E[\phi_Q\phi_2^*] & \cdots & E[\phi_Q\phi_Q^*] + \sigma^2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.2})$$

Da kovariansmatrisen er Hermitisk er egenverdiene reelle. En egenverdi i kovariansmatrisen betegnes  $\lambda$  og tilhørende egenvektor betegnes  $\vec{e}$ .

$$[\rho]\vec{e} = \lambda\vec{e} \quad (\text{D.3})$$

Betrakt en egenvektor hvor  $\vec{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_Q \end{bmatrix}$

Fra likning (D.3) og (D.2) følger:

$$\vec{e}^H [\rho] \vec{e} = \vec{e}^H \lambda \vec{e} \quad (\text{D.4})$$

$$[\rho]\vec{e} =$$

$$[\rho]\vec{e} = \begin{bmatrix} E[\phi_1\phi_1^*] + \sigma^2 + E[\phi_1\phi_2^*] + E[\phi_1\phi_3^*] \dots E[\phi_1\phi_{Q-1}^*] + E[\phi_1\phi_Q^*] \\ E[\phi_2\phi_1^*] + E[\phi_2\phi_2^*] + \sigma^2 + E[\phi_2\phi_3^*] \dots E[\phi_2\phi_{Q-1}^*] + E[\phi_2\phi_Q^*] \\ E[\phi_3\phi_1^*] + E[\phi_3\phi_2^*] + E[\phi_3\phi_3^*] + \sigma^2 \dots E[\phi_3\phi_{Q-1}^*] + E[\phi_3\phi_Q^*] \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ E[\phi_{Q-1}\phi_1^*] + E[\phi_{Q-1}\phi_2^*] + E[\phi_{Q-1}\phi_3^*] \dots E[\phi_{Q-1}\phi_{Q-1}^*] + \sigma^2 + E[\phi_{Q-1}\phi_Q^*] \\ E[\phi_Q\phi_1^*] + E[\phi_Q\phi_2^*] + E[\phi_Q\phi_3^*] \dots E[\phi_Q\phi_{Q-1}^*] + E[\phi_Q\phi_Q^*] + \sigma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_{Q-1} \\ e_Q \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} E[\phi_1\phi_1^*]e_1 + \sigma^2e_1 + E[\phi_1\phi_2^*]e_2 + E[\phi_1\phi_3^*]e_3 \dots E[\phi_1\phi_{Q-1}^*]e_{Q-1} + E[\phi_1\phi_Q^*]e_Q \\ E[\phi_2\phi_1^*]e_1 + E[\phi_2\phi_2^*]e_2 + \sigma^2e_2 + E[\phi_2\phi_3^*]e_3 \dots E[\phi_2\phi_{Q-1}^*]e_{Q-1} + E[\phi_2\phi_Q^*]e_Q \\ E[\phi_3\phi_1^*]e_1 + E[\phi_3\phi_2^*]e_2 + E[\phi_3\phi_3^*]e_3 + \sigma^2e_3 \dots E[\phi_3\phi_{Q-1}^*]e_{Q-1} + E[\phi_3\phi_Q^*]e_Q \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ E[\phi_{Q-1}\phi_1^*]e_1 + E[\phi_{Q-1}\phi_2^*]e_2 + E[\phi_{Q-1}\phi_3^*]e_3 \dots E[\phi_{Q-1}\phi_{Q-1}^*]e_{Q-1} + \sigma^2e_{Q-1} + E[\phi_{Q-1}\phi_Q^*]e_Q \\ E[\phi_Q\phi_1^*]e_1 + E[\phi_Q\phi_2^*]e_2 + E[\phi_Q\phi_3^*]e_3 \dots E[\phi_Q\phi_{Q-1}^*]e_{Q-1} + E[\phi_Q\phi_Q^*]e_Q + \sigma^2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{e}^H [\rho] \vec{e} = [e_1^* \quad e_2^* \quad e_3^* \quad \cdots \quad e_Q^*][\rho]\vec{e} =$$

$$\begin{bmatrix} e_1^* & e_2^* & \dots & e_Q^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E[\phi_1 \phi_1^*] e_1 + \sigma_1^2 e_1 + E[\phi_1 \phi_2^*] e_2 + E[\phi_1 \phi_3^*] e_3 \dots E[\phi_1 \phi_{Q-1}^*] e_{Q-1} + E[\phi_1 \phi_Q^*] e_Q \\ E[\phi_2 \phi_1^*] e_1 + E[\phi_2 \phi_2^*] e_2 + \sigma_2^2 e_2 + E[\phi_2 \phi_3^*] e_3 \dots E[\phi_2 \phi_{Q-1}^*] e_{Q-1} + E[\phi_2 \phi_Q^*] e_Q \\ E[\phi_3 \phi_1^*] e_1 + E[\phi_3 \phi_2^*] e_2 + E[\phi_3 \phi_3^*] e_3 + \sigma_3^2 e_3 \dots E[\phi_3 \phi_{Q-1}^*] e_{Q-1} + E[\phi_3 \phi_Q^*] e_Q \\ \vdots \\ E[\phi_{Q-1} \phi_1^*] e_1 + E[\phi_{Q-1} \phi_2^*] e_2 + E[\phi_{Q-1} \phi_3^*] e_3 \dots E[\phi_{Q-1} \phi_{Q-1}^*] e_{Q-1} + \sigma_{Q-1}^2 e_{Q-1} + E[\phi_{Q-1} \phi_Q^*] e_Q \\ E[\phi_Q \phi_1^*] e_1 + E[\phi_Q \phi_2^*] e_2 + E[\phi_Q \phi_3^*] e_3 \dots E[\phi_Q \phi_{Q-1}^*] e_{Q-1} + E[\phi_Q \phi_Q^*] e_Q + \sigma_Q^2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} E[\phi_1 \phi_1^*] e_1 e_1^* + \sigma_1^2 e_1 e_1^* + E[\phi_1 \phi_2^*] e_2 e_1^* + E[\phi_1 \phi_3^*] e_3 e_1^* \dots E[\phi_1 \phi_{Q-1}^*] e_{Q-1} e_1^* + E[\phi_1 \phi_Q^*] e_Q e_1^* + \\ E[\phi_2 \phi_1^*] e_1 e_2^* + E[\phi_2 \phi_2^*] e_2 e_2^* + \sigma_2^2 e_2 e_2^* + E[\phi_2 \phi_3^*] e_3 e_2^* \dots E[\phi_2 \phi_{Q-1}^*] e_{Q-1} e_2^* + E[\phi_2 \phi_Q^*] e_Q e_2^* + \\ E[\phi_3 \phi_1^*] e_1 e_3^* + E[\phi_3 \phi_2^*] e_2 e_3^* + E[\phi_3 \phi_3^*] e_3 e_3^* + \sigma_3^2 e_3 e_3^* \dots E[\phi_3 \phi_{Q-1}^*] e_{Q-1} e_3^* + E[\phi_3 \phi_Q^*] e_Q e_3^* + \\ \vdots \\ E[\phi_{Q-1} \phi_1^*] e_1 e_{Q-1}^* + E[\phi_{Q-1} \phi_2^*] e_2 e_{Q-1}^* + \dots + E[\phi_{Q-1} \phi_{Q-1}^*] e_{Q-1} e_{Q-1}^* + \sigma_{Q-1}^2 e_{Q-1} e_{Q-1}^* + E[\phi_{Q-1} \phi_Q^*] e_Q e_{Q-1}^* + \\ E[\phi_Q \phi_1^*] e_1 e_Q^* + E[\phi_Q \phi_2^*] e_2 e_Q^* + E[\phi_Q \phi_3^*] e_3 e_Q^* \dots E[\phi_Q \phi_{Q-1}^*] e_{Q-1} e_Q^* + E[\phi_Q \phi_Q^*] e_Q e_Q^* + \sigma_Q^2 e_Q e_Q^* \end{bmatrix} =$$

$$\sum_{k=1}^{k=Q} \sum_{m=1}^{m=Q} E[\phi_k \phi_m^*] e_m e_k^* + \sigma^2 \sum_{k=1}^Q e_k e_k^* = E \left[ \left( \sum_{k=1}^{k=Q} \phi_k e_k^* \right) \left( \sum_{m=1}^{m=Q} \phi_m^* e_m \right) \right] + \sigma^2 \sum_{k=1}^Q e_k e_k^* = E \left[ \left| \sum_{k=1}^{k=Q} \phi_k e_k^* \right|^2 \right] + \sigma^2 \sum_{k=1}^Q |e_k|^2$$

Av utledningen ovenfor følger:

$$\bar{e}_i^H [\rho] \bar{e}_i = E \left[ \left| \sum_{k=1}^{k=Q} \phi_k e_k^* \right|^2 \right] + \sigma^2 \sum_{k=1}^Q |e_k|^2 \quad (\text{D.5})$$

Likning (D.4) kombinert med likning (D.5) gir:

$$\bar{e}^H \lambda \bar{e} = E \left[ \left| \sum_{k=1}^{k=Q} \phi_k e_k^* \right|^2 \right] + \sigma^2 \sum_{k=1}^Q |e_k|^2$$

$$\bar{e}^H \cdot \bar{e} = \sum_{k=1}^Q |e_k|^2$$

$$\lambda \sum_{k=1}^Q |e_k|^2 = E \left[ \left| \sum_{k=1}^{k=Q} \phi_k e_k^* \right|^2 \right] + \sigma^2 \sum_{k=1}^Q |e_k|^2 \quad (\text{D.6})$$

Likning (4.57) viser at  $\sigma^2$  er en egenverdi i  $[\rho]$  og fra likning (D.6) følger:

*Kovariansmatrisens egenverdier er  $\lambda > 0$  og koariansmatrisens minste egenverdi er  $\lambda = \sigma^2$ .*

EKSEMPEL.

$$Q = 4$$

$$[\rho]\bar{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[\phi_1\phi_1^*] + \sigma^2 & \mathbb{E}[\phi_1\phi_2^*] & \mathbb{E}[\phi_1\phi_3^*] & \mathbb{E}[\phi_1\phi_4^*] \\ \mathbb{E}[\phi_2\phi_1^*] & \mathbb{E}[\phi_2\phi_2^*] + \sigma^2 & \mathbb{E}[\phi_2\phi_3^*] & \mathbb{E}[\phi_2\phi_4^*] \\ \mathbb{E}[\phi_3\phi_1^*] & \mathbb{E}[\phi_3\phi_2^*] & \mathbb{E}[\phi_3\phi_3^*] + \sigma^2 & \mathbb{E}[\phi_3\phi_4^*] \\ \mathbb{E}[\phi_4\phi_1^*] & \mathbb{E}[\phi_4\phi_2^*] & \mathbb{E}[\phi_4\phi_3^*] & \mathbb{E}[\phi_4\phi_4^*] + \sigma^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \mathbb{E}[\phi_1\phi_1^*]\mathbf{e}_1 + \sigma^2\mathbf{e}_1 + \mathbb{E}[\phi_1\phi_2^*]\mathbf{e}_2 + \mathbb{E}[\phi_1\phi_3^*]\mathbf{e}_3 + \mathbb{E}[\phi_1\phi_4^*]\mathbf{e}_4 \\ \mathbb{E}[\phi_2\phi_1^*]\mathbf{e}_1 + \mathbb{E}[\phi_2\phi_2^*]\mathbf{e}_2 + \sigma^2\mathbf{e}_2 + \mathbb{E}[\phi_2\phi_3^*]\mathbf{e}_3 + \mathbb{E}[\phi_2\phi_4^*]\mathbf{e}_4 \\ \mathbb{E}[\phi_3\phi_1^*]\mathbf{e}_1 + \mathbb{E}[\phi_3\phi_2^*]\mathbf{e}_2 + \mathbb{E}[\phi_3\phi_3^*]\mathbf{e}_3 + \sigma^2\mathbf{e}_3 + \mathbb{E}[\phi_3\phi_4^*]\mathbf{e}_4 \\ \mathbb{E}[\phi_4\phi_1^*]\mathbf{e}_1 + \mathbb{E}[\phi_4\phi_2^*]\mathbf{e}_2 + \mathbb{E}[\phi_4\phi_3^*]\mathbf{e}_3 + \mathbb{E}[\phi_4\phi_4^*]\mathbf{e}_4 + \sigma^2\mathbf{e}_4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \mathbb{E}[\phi_1\phi_1^*]\mathbf{e}_1 + \sigma^2\mathbf{e}_1 + \mathbb{E}[\phi_1\phi_2^*]\mathbf{e}_2 + \mathbb{E}[\phi_1\phi_3^*]\mathbf{e}_3 + \mathbb{E}[\phi_1\phi_4^*]\mathbf{e}_4 \\ \mathbb{E}[\phi_2\phi_1^*]\mathbf{e}_1 + \mathbb{E}[\phi_2\phi_2^*]\mathbf{e}_2 + \sigma^2\mathbf{e}_2 + \mathbb{E}[\phi_2\phi_3^*]\mathbf{e}_3 + \mathbb{E}[\phi_2\phi_4^*]\mathbf{e}_4 \\ \mathbb{E}[\phi_3\phi_1^*]\mathbf{e}_1 + \mathbb{E}[\phi_3\phi_2^*]\mathbf{e}_2 + \mathbb{E}[\phi_3\phi_3^*]\mathbf{e}_3 + \sigma^2\mathbf{e}_3 + \mathbb{E}[\phi_3\phi_4^*]\mathbf{e}_4 \\ \mathbb{E}[\phi_4\phi_1^*]\mathbf{e}_1 + \mathbb{E}[\phi_4\phi_2^*]\mathbf{e}_2 + \mathbb{E}[\phi_4\phi_3^*]\mathbf{e}_3 + \mathbb{E}[\phi_4\phi_4^*]\mathbf{e}_4 + \sigma^2\mathbf{e}_4 \end{bmatrix} =$$

$$\bar{\mathbf{e}}^H [\rho]\bar{\mathbf{e}} =$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\phi_1\phi_1^*]\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^* + \sigma^2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^* + \mathbb{E}[\phi_1\phi_2^*]\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1^* + \mathbb{E}[\phi_1\phi_3^*]\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1^* + \mathbb{E}[\phi_1\phi_4^*]\mathbf{e}_4\mathbf{e}_1^* + \\ & \mathbb{E}[\phi_2\phi_1^*]\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^* + \mathbb{E}[\phi_2\phi_2^*]\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^* + \sigma^2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^* + \mathbb{E}[\phi_2\phi_3^*]\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2^* + \mathbb{E}[\phi_2\phi_4^*]\mathbf{e}_4\mathbf{e}_2^* + \\ & \mathbb{E}[\phi_3\phi_1^*]\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3^* + \mathbb{E}[\phi_3\phi_2^*]\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3^* + \mathbb{E}[\phi_3\phi_3^*]\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3^* + \sigma^2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3^* + \mathbb{E}[\phi_3\phi_4^*]\mathbf{e}_4\mathbf{e}_3^* + \\ & \mathbb{E}[\phi_4\phi_1^*]\mathbf{e}_1\mathbf{e}_4^* + \mathbb{E}[\phi_4\phi_2^*]\mathbf{e}_2\mathbf{e}_4^* + \mathbb{E}[\phi_4\phi_3^*]\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4^* + \mathbb{E}[\phi_4\phi_4^*]\mathbf{e}_4\mathbf{e}_4^* + \sigma^2\mathbf{e}_4\mathbf{e}_4^* = \\ & \mathbb{E}[\phi_1\phi_1^*\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^* + \phi_1\phi_2^*\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1^* + \phi_1\phi_3^*\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1^* + \phi_1\phi_4^*\mathbf{e}_4\mathbf{e}_1^* + \phi_2\phi_1^*\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^* + \phi_2\phi_2^*\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^* + \phi_2\phi_3^*\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2^* + \phi_2\phi_4^*\mathbf{e}_4\mathbf{e}_2^* + \\ & \phi_3\phi_1^*\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3^* + \phi_3\phi_2^*\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3^* + \phi_3\phi_3^*\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3^* + \phi_3\phi_4^*\mathbf{e}_4\mathbf{e}_3^* + \phi_4\phi_1^*\mathbf{e}_1\mathbf{e}_4^* + \phi_4\phi_2^*\mathbf{e}_2\mathbf{e}_4^* + \phi_4\phi_3^*\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4^* + \phi_4\phi_4^*\mathbf{e}_4\mathbf{e}_4^*] + \\ & \sigma^2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^* + \sigma^2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^* + \sigma^2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3^* + \sigma^2\mathbf{e}_4\mathbf{e}_4^* = \mathbb{E}[(\phi_1\mathbf{e}_1^* + \phi_2\mathbf{e}_2^* + \phi_3\mathbf{e}_3^* + \phi_4\mathbf{e}_4^*)(\phi_1^*\mathbf{e}_1 + \phi_2^*\mathbf{e}_2 + \phi_3^*\mathbf{e}_3 + \phi_4^*\mathbf{e}_4)] + \end{aligned}$$

$$\sigma^2 \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^* & \mathbf{e}_2^* & \mathbf{e}_3^* & \mathbf{e}_4^* \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \mathbb{E}[\|\phi_1\mathbf{e}_1^* + \phi_2\mathbf{e}_2^* + \phi_3\mathbf{e}_3^* + \phi_4\mathbf{e}_4^*\|^2] + \sigma^2\bar{\mathbf{e}}^H\bar{\mathbf{e}}$$

$$\bar{\mathbf{e}}^H\lambda\bar{\mathbf{e}} = \mathbb{E}[\|\phi_1\mathbf{e}_1^* + \phi_2\mathbf{e}_2^* + \phi_3\mathbf{e}_3^* + \phi_4\mathbf{e}_4^*\|^2] + \bar{\mathbf{e}}^H\sigma^2\bar{\mathbf{e}}$$

## E KOVARIANSMATRISENS EGENVERDIER OG EGENVEKTORER

Kovariansmatrisens egenverdier er  $\lambda$  og egenvektorer  $\vec{\mathcal{E}}$  er de verdier for  $\lambda$  og  $\vec{\mathcal{E}}$  som tilfredstiller likning (E.1).

$$[\rho]\vec{\mathcal{E}} = \lambda\vec{\mathcal{E}} \quad (\text{E.1})$$

Antar at kovariansmatrisen  $[\rho]$  har Q egenvektorer. Egenvektorene betegnes:

$$\vec{\mathcal{E}}_1 = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ \vdots \\ e_{Q1} \end{bmatrix} \quad \vec{\mathcal{E}}_2 = \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{22} \\ \vdots \\ e_{Q2} \end{bmatrix} \quad \vec{\mathcal{E}}_i = \begin{bmatrix} e_{1i} \\ e_{2i} \\ \vdots \\ e_{Qi} \end{bmatrix} \quad \vec{\mathcal{E}}_Q = \begin{bmatrix} e_{1Q} \\ e_{2Q} \\ \vdots \\ e_{QQ} \end{bmatrix}$$

Multipliserer hver enkelt egenvektor med sin tilhørende egenverdi  $\lambda$  og ordner disse vektorene etter fallende egenverdi, det vil si  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_Q$  og danner følgende matrise.

$$[\lambda_1\vec{\mathcal{E}}_1 \quad \lambda_2\vec{\mathcal{E}}_2 \quad \dots \quad \lambda_Q\vec{\mathcal{E}}_Q] = \begin{bmatrix} \lambda_1 e_{11} & \lambda_2 e_{12} & \dots & \lambda_1 e_{1Q} \\ \lambda_1 e_{21} & \lambda_2 e_{22} & \dots & \lambda_1 e_{2Q} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1 e_{Q1} & \lambda_2 e_{Q2} & \dots & \lambda_Q e_{QQ} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1Q} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2Q} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e_{Q1} & e_{Q2} & \dots & e_{QQ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_Q \end{bmatrix}$$

Definerer

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1Q} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2Q} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e_{Q1} & e_{Q2} & \dots & e_{QQ} \end{bmatrix} = [\mathcal{E}] \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_Q \end{bmatrix} = [\Lambda]$$

Det vil si:

$$[\lambda_1\vec{\mathcal{E}}_1 \quad \lambda_2\vec{\mathcal{E}}_2 \quad \dots \quad \lambda_Q\vec{\mathcal{E}}_Q] = [\mathcal{E}] \cdot [\Lambda] \quad (\text{E.2})$$

Videre er

$$\begin{aligned} [\lambda_1 \bar{\mathcal{E}}_1 \quad \lambda_2 \bar{\mathcal{E}}_2 \quad \dots \quad \lambda_Q \bar{\mathcal{E}}_Q] &= [[\rho] \bar{\mathcal{E}}_1 \quad [\rho] \bar{\mathcal{E}}_2 \quad \dots \quad [\rho] \bar{\mathcal{E}}_Q] = \\ [\rho] [\bar{\mathcal{E}}_1 \quad \bar{\mathcal{E}}_2 \quad \dots \quad \bar{\mathcal{E}}_Q] &= [\rho] [\mathcal{E}] \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

$$[\rho] [\mathcal{E}] = [\mathcal{E}] [\Lambda]$$

$$[\rho] = [\mathcal{E}] [\Lambda] [\mathcal{E}]^{-1}$$

$$[\rho] = [\mathcal{E}] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_Q \end{bmatrix} [\mathcal{E}]^{-1} \quad (\text{E.4})$$

I et praktisk system med  $Q$  antenneelementer vil kovariansmatrisen  $[\rho]$  inneholde  $Q$  egenverdier og  $Q$  egenvektorer. Hver egenverdi med tilhørende egenvektor er et uttrykk for et mottatt signal. Dersom det mottas  $D$  signaler vil  $\lambda_Q$  ha en multiplisitet lik  $Q - D$  og  $Q - D$  egenvektorer som representerer støy.

## F CRAMER-RAO GRENSEN

I beskrivelser av metoder for emitterlokalisering angis ofte en metodes CRLB (Cramer-Rao's lower bound). CRLB er en teoretisk nedre grense for variansen til en parameter  $\theta$  i et signal når feilbidraget skyldes ukorrelerert (hvit) støy.

Et signal kan skrives på den generelle formen :

$$s(t) = A(t - \tau) \cos(\omega(t - \tau) + \varphi(t - \tau)) = \text{Re} \left\{ A(t - \tau) e^{j\omega(t - \tau) + \varphi(t - \tau)} \right\} = \text{Re} \{ q(t) \}$$

Et signal korrumpert med støy er illustrert i figur F 1.

Parameterne  $A$ ,  $\tau$ ,  $\omega$ , og  $\varphi$  er parametere i uttrykket  $q(t)$ .

En parameter betegnes som  $\theta$ .

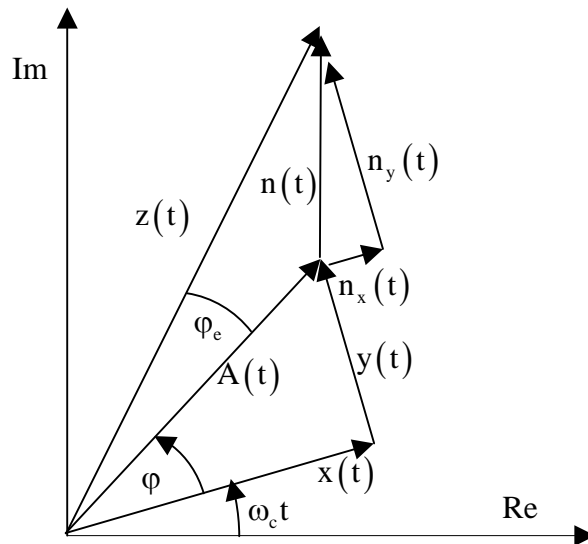
Ved angivelse av CRLB er det vanlig å anta:  
Signalet som måles har en varighet lik  $T$ .

Den tosidige støytettheten er  $N_0/2$ .

Det er også vanlig å anta at kun en av parametrene er korrumpert med støy (parameter  $\theta$ ).

Da er CRLB definert som (7):

$$\text{CRLB} = \text{Var}[\theta] = \frac{N_0/2}{\int_{t=-T/2}^{t=T/2} \sqrt{\left(\frac{\partial q(t, \theta)}{\partial \theta}\right) \cdot \left(\frac{\partial q(t, \theta)}{\partial \theta}\right)^*} dt} \quad (\text{F.1})$$



Figur F 1 Illustrasjon av et signal med additiv støy



**Litteratur**

- (1) Poisel Richard A (2002): Introduction to Communication Electronic Warfare Systems, Artech House, side 331, 353, 373, 409. ISBN 1-58053-344-2
- (2) Kraus John D (1988): Antennas ( Second Edition), McGraw-Hill, side 26. ISBN 0-07-035422-7
- (3) Slåstad Arne (1989): Prediksjon av propagasjon i VHF/UHF området, FFI/NOTAT-89/7004
- (4) Rabiner L R and Gold B (1975): Theory and Application of Digital Signal Processing (Eds Bell Telefon Laboratories and Licoln Laboratory), Prentic Hall , New Jersey, side 51. ISBN 0-13-914101-4
- (5) Tsui James (2001): Digital Techniques for Wideband Receivers, Second Edition, Artech House, side 470, 480, 521. 529. ISBN 1-58053-299-3
- (6) Schmidt (1986): Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation, IEEE Transaction on Antennas and Propagation VOL. AP-34, No 3, March 1986, page 276.
- (7) Levanon Navda (1988): Radar Principles (Eds Tel-Aviv University), John Wiley & sons, side177. ISBN 0-471-85881-1
- (8) Zeta Laboratories: ZS-1000 Signal, Intercept and location system, 1988, San Jose, California.