



**FFI** Forsvarets  
forskningsinstitutt

23/00901

**FFI-RAPPORT**

# Usikkerhet i dybdegrid

Magne Mandt



# Usikkerhet i dybdegrid

Magne Mandt

---

**Emneord**

Digitale kartsystemer  
Dybdemåling  
Navigasjon

**FFI-rapport**

23/00901

**Prosjektnummer**

1600

**Elektronisk ISBN**

978-82-464-3471-1

**Engelsk tittel**

Uncertainty in depth grids

**Godkjennerne**

Arvid Melkevik, *forskningsleder*

Håkon Storli Andersen, *forskningssjef*

*Dokumentet er elektronisk godkjent og har derfor ikke håndskreven signatur.*

**Opphavsrett**

© Forsvarets forskningsinstitutt (FFI). Publikasjonen kan siteres fritt med kildehenvisning.

---

---

## Sammen drag

Den norske kontinentalsokkelen og territorialfarvannene våre har gjennom mange år blitt detalj kartlagt. Kartleggingen er gjort av både Kartverket, Forsvarets forskningsinstitutt (FFI) og private kartleggingsselskap. Den militære verdien av dybde data innenfor territorialgrensen gjør at de er underkastet et regime som graderer de mest detaljerte dataene. I 2020 ble det etablert et prosjekt for å gjøre alle innsamlede dybde data tilgjengelig som høyoppløselige grid data (format GeoPackage). Dybden i gridet vil være gjennomsnittet av målingene innenfor hver rute. I tillegg ønsker brukerne at det også knyttes usikkerhet til hvert punkt i gridet. Prosjektet er et samarbeid mellom Kartverket, Forsvaret og FFI. Kartverket vil produsere dybderasterne, mens FFIs bunnkartleggingsmiljø vil levere data. Andre miljøer ved FFI vil representere mulige brukere av gridede dybde data. FFI ble, som brukere, forespurt om en definisjon eller beskrivelse av usikkerhet. Arbeidet ble utført innenfor FFIs prosjekt 1600 «Videre støtte til anskaffelsesfasen for nye ubåter».

Målet for denne rapporten er å finne et godt estimat for standardavviket for en rute. «Godt» betyr at forskjellen mellom dybden i vilkårlige posisjoner i ruta og gjennomsnittsverdien kan modelleres som en normalfordeling, med standardavvik lik dette estimatet. Estimaten må baseres på målingene som er benyttet for å beregne verdien for ruta. Tre mulige usikkerhetsattributter ble undersøkt. I tillegg ble effekten av antallet målinger per rute vurdert. De tre mulige parameterne er det empiriske standardavviket (som er den vanlige estimatoren for usikkerhet), ekstremavviket (største forskjell mellom gjennomsnitt og enkeltmålinger) og spennet (største minus minste enkeltmåling). De to siste må skaleres for å fungere som estimatører for standardavvik. Det ble brukt data fra to områder: en fjordside og et åpent, kupert kystterreng.

Undersøkelsen har vist at antallet målinger per rute er et viktig parameter. Ved få målinger er vanskelig å finne et godt usikkerhetsestimaten. I denne rapporten er «få» fem eller færre, men det kan være verdt å undersøke dette nærmere også på andre områder.

Det empiriske standardavviket er en brukbar estimator så lenge det er nok målinger. Ekstremavviket og spennet kan også gi gode estimatører, men det har ikke vært mulig å finne skaleringsfaktorer som passer for alle grid i undersøkelsen. Ekstremavviket kan allikevel brukes til å vurdere om fordelingen er normalfordelt, når det sammenholdes med standardavviket. Det er også viktig å være oppmerksom på at det vil forekomme tilfeller hvor dybdeforskjellen rett og slett ikke kan modelleres som normalfordelt, og avvik mellom gjennomsnittet og en uavhengig måling kan bli mye større enn standardavviket skulle tilsi.

FFI anbefaler at de følgende attributtene knyttes til hver gridrute: gjennomsnittsdypde, standardavvik, ekstremavvik og antall målinger. Dersom det er mulig å legge inn hele gridets gjennomsnittlige standardavvik/rute og ekstremavvik/rute som metainformasjon, bør det gjøres.

---

---

## Summary

The Norwegian territorial waters and continental shelf have been mapped by The Norwegian Mapping Authority, The Norwegian Defence Research Establishment (FFI), and other actors over a number of years. The highest resolution data within the territorial limit are classified due to their military value. A project to make depth data available as high-resolution raster maps (distributed as GeoPackage) was established in 2020. The depth in these raster maps will be the average within each grid cell. The users also want an uncertainty attribute connected to each grid cell. The project is a cooperation between the Mapping Authority, The Norwegian Armed Forces, and FFI. The Mapping Authority will deliver depth data and produce the depth grids. FFI will deliver depth data and represent possible users of the depth grids. As users, FFI was asked for a definition or description of uncertainty. This work was performed within FFI project 1600 "Further support for the procurement phase for new submarines".

The goal of this report is to find a good estimate for the standard deviation of a grid cell, with good meaning that the difference between the depth in a random position and the average value can be modeled as a normal distribution with a standard deviation equal to this estimate. The estimate must be based on the measurements used to compute the grid depth. Three possible estimators were examined, along with the effect of the number of measurements/cell. The three estimators are: the empirical standard deviation (the usual estimator for uncertainty), the extreme deviation (the largest deviation between average and single measurements), and the span (largest minus smallest measurement). The latter two must be scaled to work as estimators. Two areas were examined: The side of a fjord and an open, uneven terrain off the coast.

The investigation has shown that number of measurements/cell is an important parameter as it is difficult to find a good uncertainty estimate when there are few measurements. In this report, 'few' are five or less, but it might be worthwhile to investigate this in other areas as well.

The empirical standard deviation is an adequate estimator as long as there are enough measurements. The extreme deviation and the span can also provide good estimators, but it has not been possible to find scale factors that fits all the grids in this investigation. The extreme deviation can, when compared with the standard deviation, be used to see if the distribution is Gaussian. It is also important to note that there will be cases where the depth difference simply cannot be modeled as normally distributed. In such cases, the difference between the average and an independent measurement can be much larger than the standard deviation indicates.

FFI recommends that each grid cell have the following attributes: average depth, standard deviation, extreme deviation, and number of measurements. The average standard deviation/cell and extreme deviation/cell should be added as meta information for the grid, if possible.

---

---

# Innhold

<b>Sammendrag</b>	<b>3</b>
<b>Summary</b>	<b>4</b>
<b>Forord</b>	<b>7</b>
<b>1 Innledning</b>	<b>9</b>
<b>2 Om undersøkelsen</b>	<b>9</b>
2.1 Usikkerhet	10
2.1.1 Normalfordeling og usikkerhet	11
2.2 Analysen	12
<b>3 Analyse</b>	<b>12</b>
3.1 Område 1	13
3.1.1 Rå fordeling	14
3.1.2 Mulige sammenhenger	16
3.1.3 Undersøkelse av usikkerhetsparametere	21
3.1.4 Fordelinger for normaliserte forskjeller	21
3.1.5 Statistikk for normalisering med standardavvik for ruten	22
3.1.6 Statistikk for normalisering med ekstremavvik/2	23
3.1.7 Statistikk for normalisering med spenn/4	24
3.2 Område 2 – 5 meters grid	25
3.2.1 Rå fordeling	26
3.2.2 Mulige sammenhenger	29
3.2.3 Fordelinger for normaliserte forskjeller	34
3.2.4 Statistikk for normalisering med standardavvik for ruten	34
3.2.5 Statistikk for normalisering med ekstremavvik/2	35
3.2.6 Statistikk for normalisering med spenn/4 for ruten	36
3.3 Område 2 – 5 meters grid og færre målinger	37
3.3.1 Rå fordeling	38
3.3.2 Fordelinger for normaliserte forskjeller	41
3.3.3 Statistikk for normalisering med standardavvik for ruten	41
3.3.4 Statistikk for normalisering med ekstremavvik/2	42
3.3.5 Statistikk for normalisering med spenn/4 for ruten	43

---

3.4	Område 2 – 10 meters grid	44
3.4.1	Rå fordeling	45
3.4.2	Fordelinger for normaliserte forskjeller	48
3.4.3	Statistikk for normalisering med standardavvik for ruten	48
3.4.4	Statistikk for normalisering med ekstremavvik/2	49
3.4.5	Statistikk for normalisering med spenn/4 for ruten	50
<b>4</b>	<b>Drøfting og konklusjoner</b>	<b>51</b>
4.1	Antall målinger	51
4.2	Usikkerhetsparameter	51
4.3	Valgt filinnhold	52
4.4	Eventuelle videre undersøkelser	52
	<b>Forkortelser</b>	<b>53</b>
	<b>Referanser</b>	<b>54</b>



---

---

## Forord

Jeg vil gjerne takke Ove Hagen for inspirasjon til histogrammene i denne rapporten. Jeg vil også takke bunnkartleggingsmiljøet for godt samarbeid i dette og andre arbeider.

Kjeller, 24.03.23  
Magne Mandt



---

---

# 1 Innledning

Norsk kontinentalsokkel og territorialfarvann har gjennom en årrekke blitt detaljkartlagt av aktører som Kartverket, FFI, og private kartleggingsselskap. Disse detaljerte dybde-dataene kan være verdifulle for både militære og sivile formål. Den militære verdien gjør at dybde-data innenfor territorialgrensen er underkastet et graderingsregime som definerer de mest detaljerte dataene som KONFIDENSIELT.

Så langt har de detaljerte dybde-dataene først og fremst blitt distribuert som detaljerte, graderte kart med dybdekonturer. Disse er velegnet for navigatører, men mindre egnet for annen bruk som krever at dybdene kan behandles algoritmisk. I 2020 ble derfor etablert et prosjekt med det formål å gjøre alle innsamlede dybde-data tilgjengelig som høyoppløselige griddata (GeoTiff). Prosjektet er et samarbeid mellom Kartverket, Forsvaret og FFI, hvor Kartverket vil levere data og produsere dybderasterne, mens FFIs bunnkartleggingsmiljø vil levere data fra sine oppmålinger. Dette er en videreføring av eksisterende praksis. Andre miljøer ved FFI vil representere mulige brukere av gridede dybde-data. Fra brukersiden er det ønskelig at det følger med usikkerhet til hvert enkelt gridpunkt. FFI ble derfor forespurt om en nærmere definisjon eller beskrivelse av denne usikkerheten, som denne rapporten er et svar på. Arbeidet er utført innenfor FFIs prosjekt 1600 Videre støtte til anskaffelsesfasen for nye ubåter, ettersom Ubåttjenesten vil være en av de primære brukerne av det nye systemet.

Kartverket ønsker å distribuere dybderasterne som GeoPackage [1], en åpen standard. Det medfører at et raster kan ha maksimalt fire 'bånd', dvs. fire ulike numeriske attributter knyttet til hvert gridpunkt [2]. En av disse egenskapene vil måtte være dybde, så det er maksimalt tre igjen for å beskrive usikkerheten.

## 2 Om undersøkelsen

Moderne havbunnskartlegging gjøres typisk med multistråle-ekkolodd, hvor hvert ping gir en vifte med målinger under kartleggingsfartøyet. Dette gir en stor mengde råmålinger, som i denne undersøkelsen vil være redusert til et grid, dvs. et horisontalt rutenett med en dybde for hvert punkt/hver rute i gridet. I denne undersøkelsen vil dybden være beregnet som gjennomsnittet for ruten. Alternativ som minste dybde (som kan brukes for sikker navigasjon) og avstandsveiet gjennomsnitt blir ikke drøftet. Videre er det snakk om rutenett med høy horisontal oppløsning, typisk fem eller 10 meter.

---

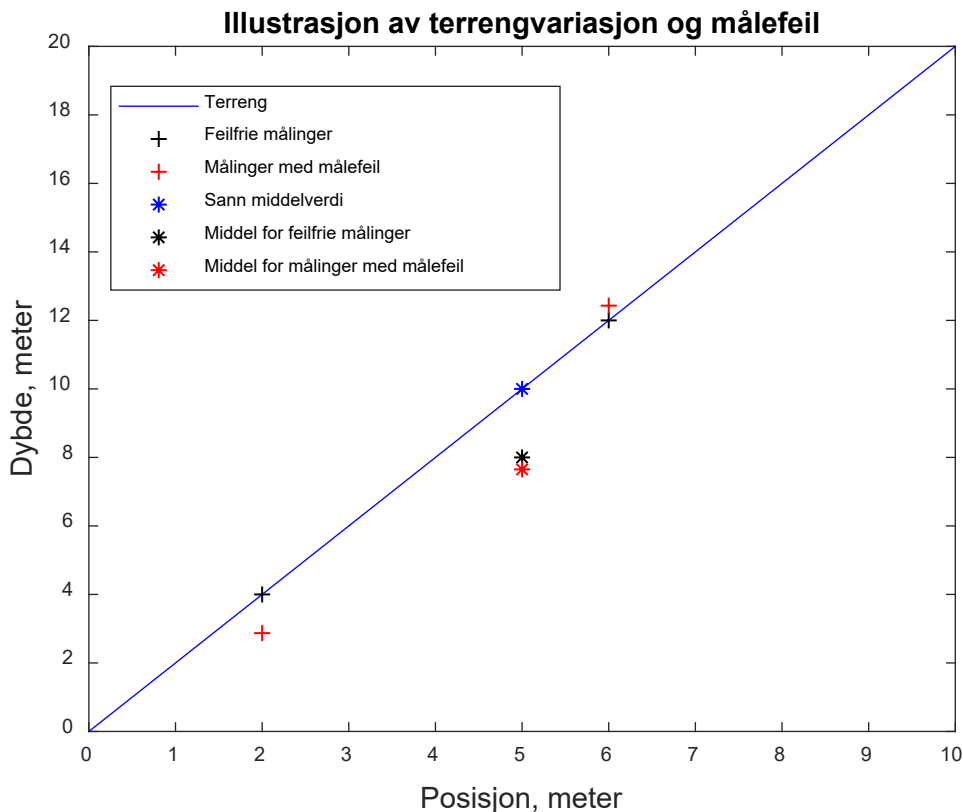
---

## 2.1 Usikkerhet

Gjennomsnittsdybden gitt i en rute er en størrelse som forsøker å si noe om terrenget innenfor ruten. Den er basert på målinger beheftet med målefeil, så selv på helt flat bunn vil den avvike noe fra sann verdi. Når terrenget varierer, vil terrengvariasjon føre til at vilkårlige punkt i ruten har en annen sann dybde enn selv et gjennomsnitt basert på feilfrie målinger. I noen anvendelser er det nesten like viktig å vite usikkerheten, dvs. hvor mye et vilkårlig punkt i ruta kan avvike fra gjennomsnittet, som gjennomsnittet i seg selv.

I uformelle diskusjoner har det blitt foreslått å sette usikkerhetsparametere ut fra opplysninger om hvilken sonar som ble benyttet til kartleggingen, evt. når kartleggingen ble gjort hvis sonaropplysninger mangler. Tanken var at sonarparameterne, evt. sammen med dybde, kunne gi en helt eller delvis måle-uavhengig beskrivelse av målefeilen. En slik metode vil kunne beskrive den forventede målefeilen, men ikke terrengvariasjonen. Denne metoden bør derfor ikke brukes, og vil ikke bli vurdert videre. Metoder basert på variasjonen blant målingene innenfor en rute vil kunne plukke opp både terrengvariasjon og målefeil, og er det som vil bli vurdert i denne rapporten.

I Figur 2.1 er problemstillingen illustrert med et konstruert, forenklet eksempel med en endimensjonal horisontal posisjon, som strekker seg fra 0 til 10 meter. Dybden er to ganger posisjonen, dvs. at den går fra 0 til 20 meter. Den sanne middelveiden for dybden er 10 meter. I eksemplet er det videre gjort to målinger, ved posisjon 2 meter og posisjon 6 meter. Til slutt er det lagt tilfeldig normalfordelt målestøy med standardavvik 0,5 meter på disse målingene. Det er tydelig at selv den sanne middelveiden gir en mangelfull beskrivelse av dybdene i dette eksempelet. Middelet basert på de feilfrie målingene er 8 meter. Forskjellen mellom denne verdien og det sanne middelet skyldes at målingene er skjevt fordelt langs linjen, en effekt som vil forekomme hyppigst når det er få målinger. Til sist fører målefeilene til at målingene avviker noe fra sannheten i de posisjonene de er målt i, slik at med målefeil blir middelet 7,65 meter. Når målefeilen er uavhengig mellom målinger vil denne effekten avta med roten av antall målinger.



Figur 2.1 Illustrasjon av terrengvariasjon og målefeil

### 2.1.1 Normalfordeling og usikkerhet

Tidligere undersøkelser ([3]) har vist at forskjellen mellom et ensemble av uavhengige målte dybder og gjennomsnittsverdiene for rutene posisjonen deres ligger i er tilnærmet normalfordelt, men med noe tyngre og lengre haler enn en ideell normalfordeling. (Den herværende undersøkelsen viser at fordelingen til forskjellene også er spissere enn en normalfordeling, noe som ikke ble undersøkt i [3].)

Normalfordelingen (også kjent som Gaussfordeling og Bell curve) er definert med to parametere: middelveidi ( $\mu$ ) og varians ( $\sigma^2$ ). Middelveidien gir senter av fordelingen, mens variansen gir usikkerheten. Kvadratrotten av varians er kjent som standardavvik. Normalfordelingen og egenskapene dens er beskrevet i f. eks.[4]. Et mål for denne rapporten er å finne et godt estimat for standardavviket for en rute, hvor godt betyr at forskjellen mellom dybden i vilkårlige posisjoner i ruta og gjennomsnittsverdien kan modelleres som en normalfordeling med standardavvik lik dette estimatet. Estimaten må baseres på målingene som er benyttet for å beregne verdien for ruta. Tre kandidater er vurdert:  $\bar{\sigma} = s$ , hvor  $s$  er det velkjente empiriske standardavviket:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \text{ hvor } \bar{x} \text{ er det empiriske gjennomsnittet, dvs. rutes dybdeverdi.}$$

---

---

Det empiriske standardavviket er en forventningsrett estimator for en fordelings standardavvik, og mye brukt som mål på usikkerhet eller spredning i et datasett. Det bør dermed være kjent for brukerne. Det kan også allerede være tatt i bruk av enkelte brukere. Dette taler for at det kanskje bør med uansett.

Den andre kandidaten til usikkerhetsestimator er en  $\bar{\sigma}$  basert på ekstremavviket, dvs. den største forskjellen mellom måling og gjennomsnitt blant de målingene som er brukt til å beregne gjennomsnittet for ruten.

Den tredje kandidaten er en  $\bar{\sigma}$  basert på spennet, hvor spennet er definert som forskjellen mellom største og minste verdi blant målingene som er brukt til å beregne gjennomsnittet for ruten. Både spenn og ekstremavvik må skaleres for kunne fungere som  $\bar{\sigma}$ .

Merk at med bare to målinger i ruta, så er det en analytisk sammenheng mellom de mulige usikkerhetsparameterne. Sammenhengen er at spennet er to ganger ekstremavviket, mens det empiriske standardavviket er roten av to ganger ekstremavviket.

For den analytiske normalfordelingen skal 1. og 99. persentil ligge på  $\pm 2,33$  standardavvik. 0,26 % av dataene vil ligge utenfor  $\pm$  tre standardavvik. Matematisk er normalfordelingen definert fra minus til pluss uendelig, så det er ikke mulig å sette noen harde grenser for minimums- og maksimumsverdier. Det blir imidlertid mer sannsynlig å treffe en ekstrem verdi jo flere målinger det er fra en fordeling.

## 2.2 Analysen

Analysen bruker et sett målepunkter som ikke er brukt til å bygge gridet, og finner forskjellen mellom disse målepunktene og gridets dybde i ruten målepunktet ligger i. Forskjellene blir så analysert med tanke på spredningen og de mulige usikkerhetsparameterne som ble beregnet for hver rute da gridet ble bygget. Dette vil lede fram til en anbefaling. Anbefalingen vil gjelde hvilke attributter som bør være med for hver rute, ikke hvordan de bør brukes.

## 3 Analyse

Analysen vil bruke kvalitetssikrede dybdemålinger fra to områder. Kvalitetssikringen består i å fjerne utliggere (wild points), dvs. enkeltmålinger som skiller seg sterkt ut fra målingene rundt dem. Denne rensingen gjøres automatisk, ut fra et sett parametere som settes for jobben. Dette innebærer at det ligger en implisitt eller eksplisitt antagelse om spredningen av enkeltdybder inne i kvalitetssikringen, slik at det er en viss 'løfte seg selv etter håret' effekt når man så beregner spredning for de rensede dataene.

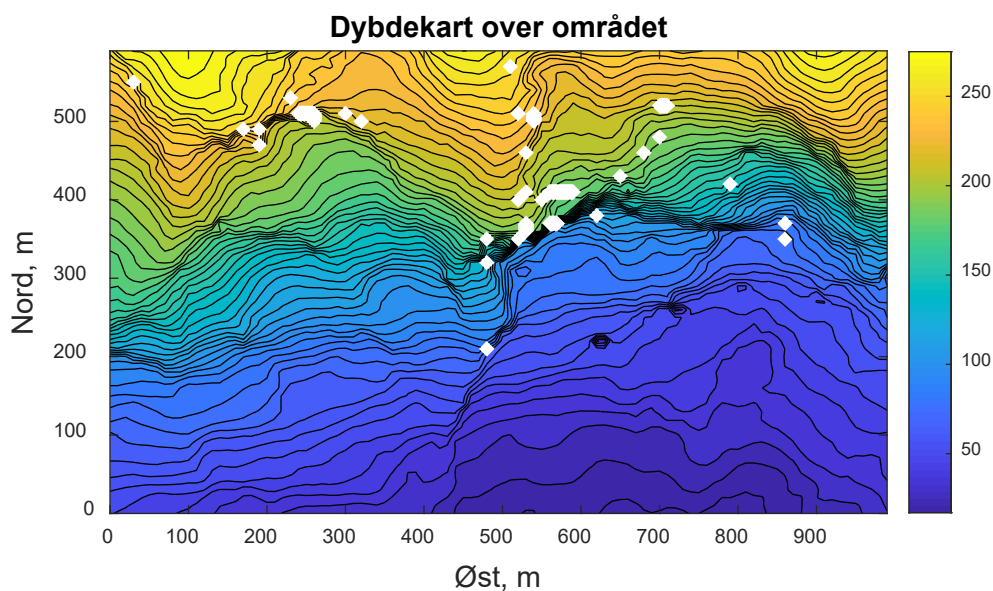
---

---

Område 1 er en fjordside som ble kartlagt før 2010, Område 2 er et kupert område utenfor kysten, som ble kartlagt i 2022. Avstanden i tid medfører at det er brukt forskjellige sensorer og prosesseringsprogramvare i kartleggingen av de to områdene.

### 3.1 Område 1

Terrenget er en fjordside med varierende tetthet av dybdemålinger. 10 % av dataene ble trukket ut som kontrollpunkter. I underkant av 163 000 dybdemålinger ble brukt til å lage gridet, mens kontrollpunktene utgjorde ca. 18 000 dybdemålinger. Gridet har 10 meter horisontal oppløsning og 6000 ruter. I gjennomsnitt er det 27,1 målinger per rute, maksimum er 191. 40 ruter er uten målinger, 1170 har 5 eller færre målinger og 2437 har 10 eller færre målinger. Gjennomsnittlig standardavvik for hver rute er 1,41 meter, gjennomsnittlig ekstremavvik 2,40 meter og gjennomsnittlig spenn 4,22 meter. Det samme området ble undersøkt i [3].

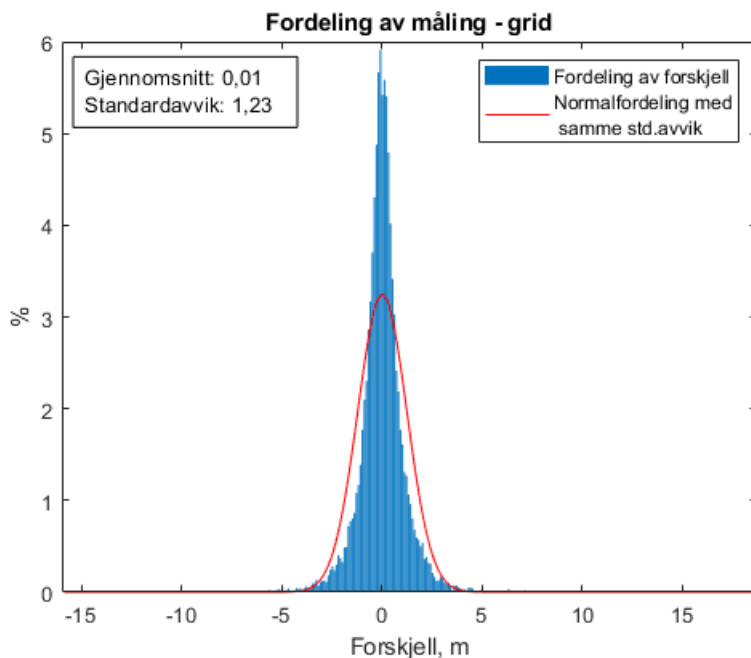


*Figur 3.1 Dybdekart over området*

Terrenget er vist i Figur 3.1. Hvite felt er uten målinger. I analysen vil dybden i kontrollpunktene bli sammenlignet med grid-dybden for den ruten den horisontale posisjonen til kontrollpunktet ligger i. Det gjøres ingen interpolasjon. Kontrollpunkt og grid er uavhengige i den forstand at kontrollpunktene ikke er brukt til å lage gridet, men de er antagelig fra samme kartleggingstokt. Det betyr at forskjellene ikke inneholder målefeil som er felles (langsomtvarierende), men vil inneholde målestøy.

### 3.1.1 Rå fordeling

Fordelingen av (måling – grid) for kontrollpunktene er vist i Figur 3.2.



Figur 3.2 Fordeling av (måling – grid)

Fordelingen er symmetrisk, men både spissere og bredere enn en normalfordeling med samme standardavvik. 1. og 99. persentil ligger på ca. 2,7 standardavvik. 1,55 % av forskjellene er større enn tre standardavvik. Ekstremverdiene ligger også langt unna senter. Samtidig viser den spisse formen at det er en større andel forskjeller i senter (dvs. rundt 0) enn for en normalfordeling. Det siste er en effekt som ikke ble plukket opp i undersøkelsen i [3], da den konsentrerte seg om store forskjeller (dvs. halene til fordelingene):

Tabell 3.1 gir statistikk for alle forskjeller i ruter med mer enn 1 måling (det er bare disse det kan beregnes usikkerhetsparameter for), alle forskjeller i ruter med mer enn fem målinger, og alle forskjeller i ruter med mer enn 10 målinger.

Målinger i ruten	Gjennomsnitt	Standardavvik	Minimum	1. persentil	99. persentil	Maksimum	% utenfor +/- 3 st.avvik
N > 1	0,01	1,23	-15,9	-3,33	3,37	18,7	1,55
N > 5	0,01	1,13	-10,2	-3,12	3,12	14,0	1,58



N > 10	0,01	1,05	-10,2	-2,86	2,91	6,0	1,54
--------	------	------	-------	-------	------	-----	------

Tabell 3.1 Statistiske resultater for rå forskjeller

Både persentilverdiene og andelen forskjeller utenfor tre standardavvik viser at ensemblefordelingen er bredere enn en normalfordeling, men kommer noe nærmere når antallet målinger i ruten øker.

Tabell 3.2, under, gir detaljer for de fem største forskjellene og deres tilhørende gridruter.

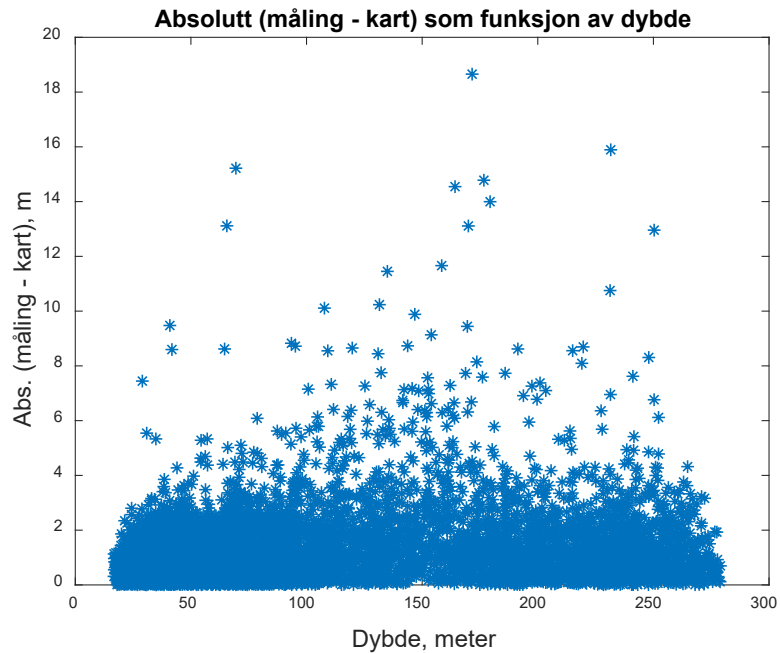
Rang Størst er #1	Faktisk forskjell	Standardavvik	Ekstremavvik	Spenn	Antall målinger
1	18,65	33,71	38,91	59,41	3
2	-15,21	12,05	16,60	27,01	5
3	-14,78	3,27	4,58	7,27	4
4	-14,54	1,22	1,26	2,44	3
5	13,99	8,18	14,77	21,46	13

Tabell 3.2 De 5 største forskjellene

To av de største forskjellene (nr. tre og fire) er mye større enn de mulige spredningsparameterne skulle tilsi. De aktuelle rutene har henholdsvis tre og fire målinger, men samtidig normale standardavvik. Forskjell nr. 1 er derimot fra ruten med størst standardavvik, og forskjellen er absolutt ikke stor i forhold til usikkerhetsparameterne.

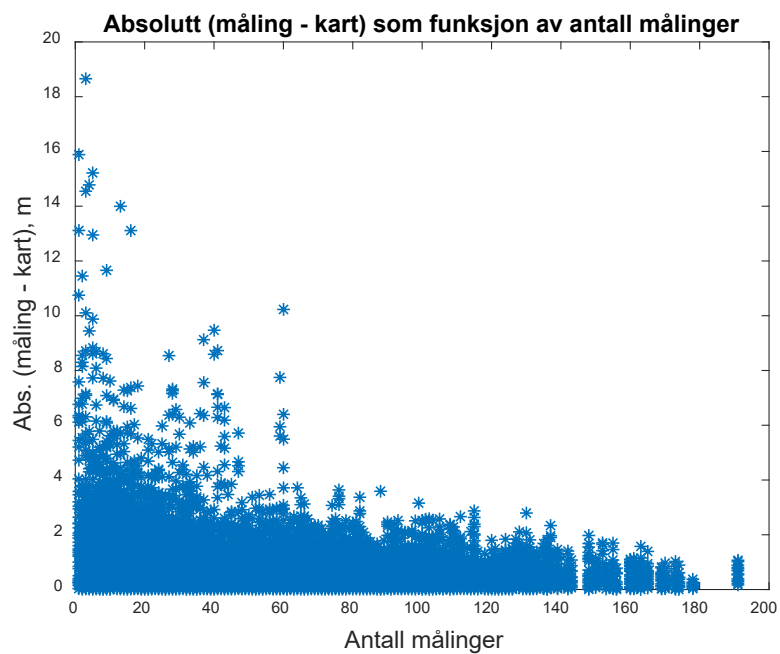
Den videre analysen vil først se etter mulige kilder til forskjeller, for så å analysere de mulige usikkerhetsparameterne. I figurene representerer hver '\*' en måling.

### 3.1.2 Mulige sammenhenger



Figur 3.3 Forskjellen mellom måling og kart som funksjon av dybde

Figur 3.3 viser ingen åpenbar sammenheng mellom forskjeller og dybde.

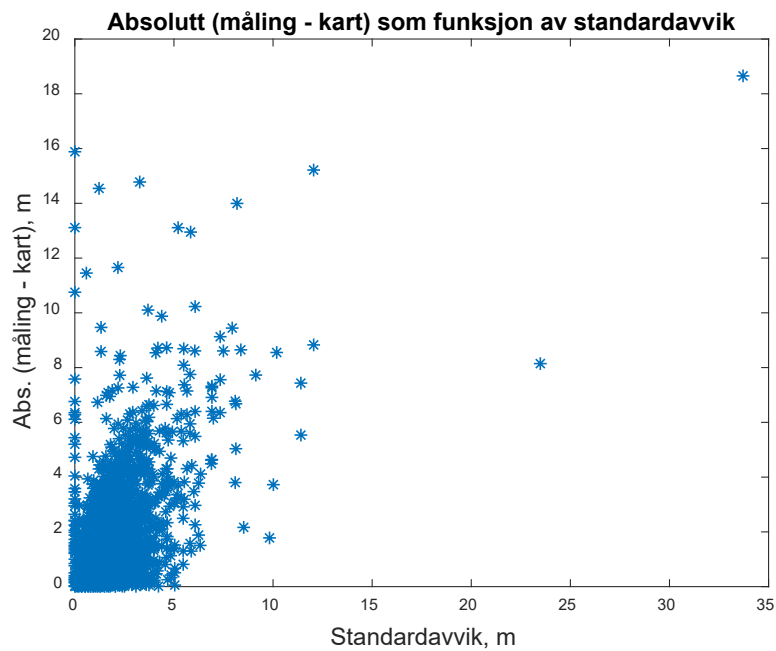


Figur 3.4 Forskjellen mellom måling og kart som funksjon av antall målinger i ruten

---

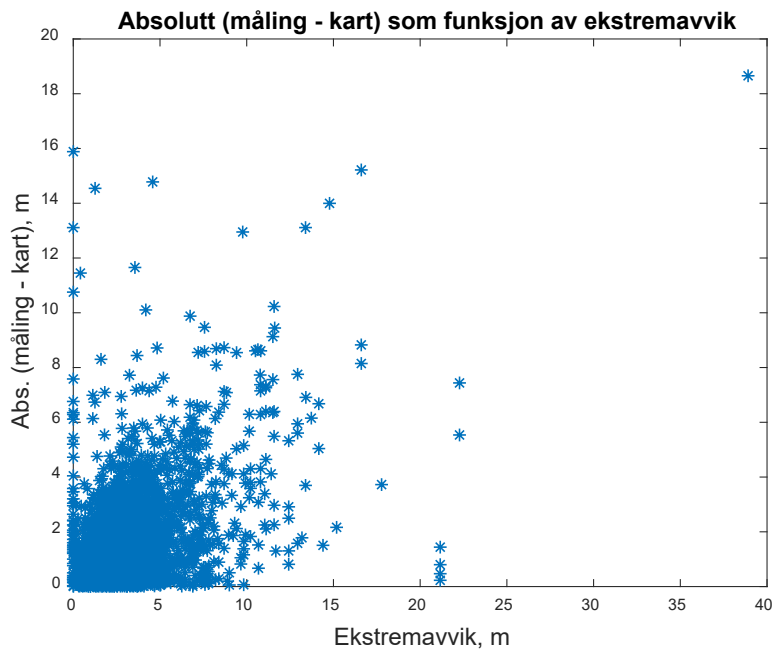
---

Det ser ut til å være en sammenheng mellom få målinger i ruten og stor feil, se Figur 3.4. Noe av dette kan skyldes at det er flest oppslag i ruter med få målinger (fordelingen av målinger/rute har maksimum i 10 målinger/rute), men ikke alt. Det er også rimelig at et gjennomsnitt basert på få målinger kan avvike mer fra et vilkårlig punkt i ruta enn et basert på mange målinger.



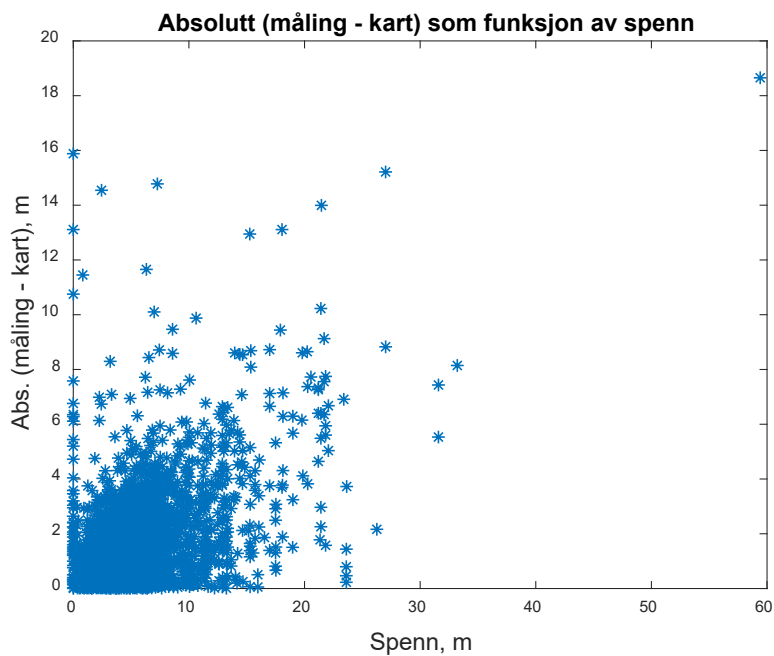
*Figur 3.5 Forskjellen mellom måling og kart som funksjon av standardavvik*

Forskjellen som funksjon av empirisk standardavvik er vist i Figur 3.5. Den viser en trend, men samtidig er det store forskjeller for veldig små standardavvik.



Figur 3.6 Forskjellen mellom måling og kart som funksjon av ekstremavvik

Forskjellen som funksjon av ekstremavvik i Figur 3.6 viser omtrent det samme som Figur 3.5, men trenden er visuelt klarere.



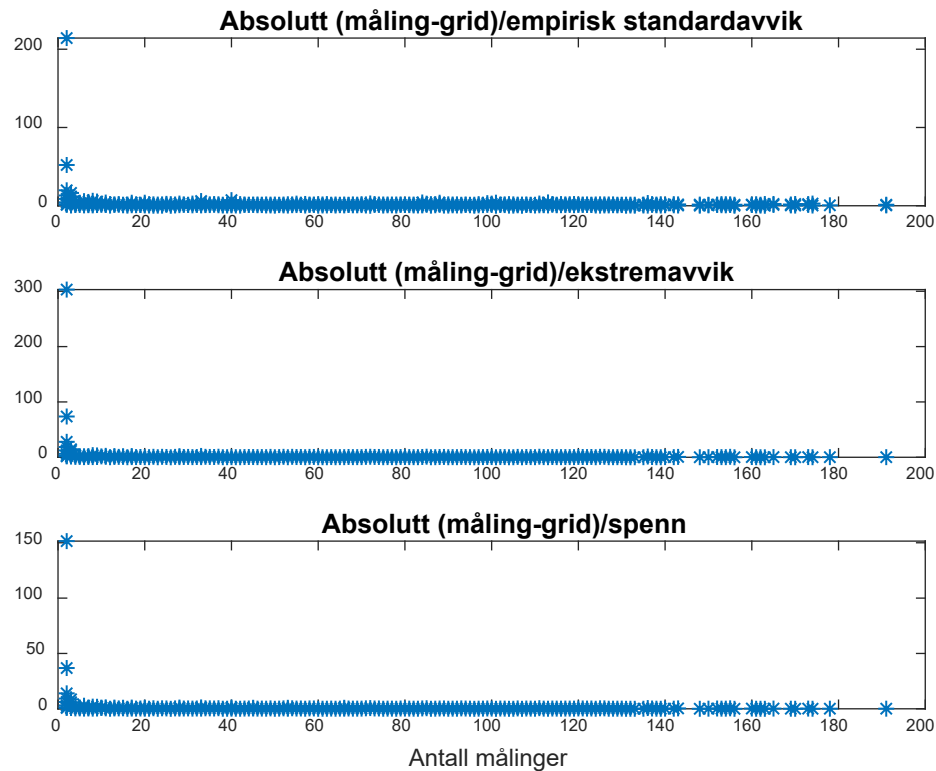
Figur 3.7 Forskjellen mellom måling og kart som funksjon av spenn

Spennet, vist i Figur 3.7, gir tilsvarende resultat som ekstremavvik.

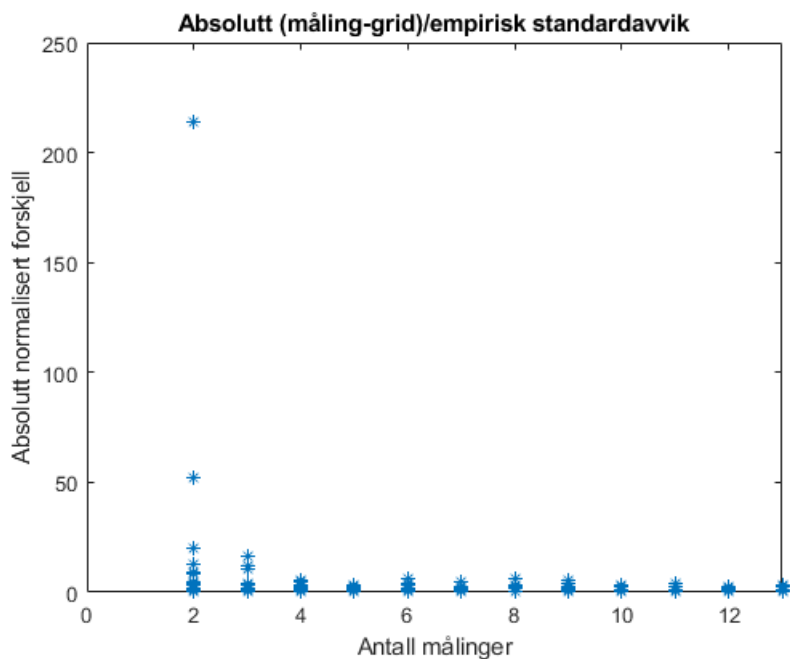
---

---

Alle usikkerhetsparameterne viser en sammenheng med de faktiske forskjellene. Alle har imidlertid også en håndfull målinger som ligger langt over det den generelle trenden skulle tilsi. Ut fra Figur 3.4 ser det ut til å være en sammenheng med at rutene er basert på få målinger, gjerne sammen med kraftig terrengdynamikk. Sammenhengen med få målinger blir vist i Figur 3.8 og Figur 3.9, som viser forskjellen delt på mulige usikkerhetsparametere, dvs. en normalisert forskjell, som funksjon av antall målinger.

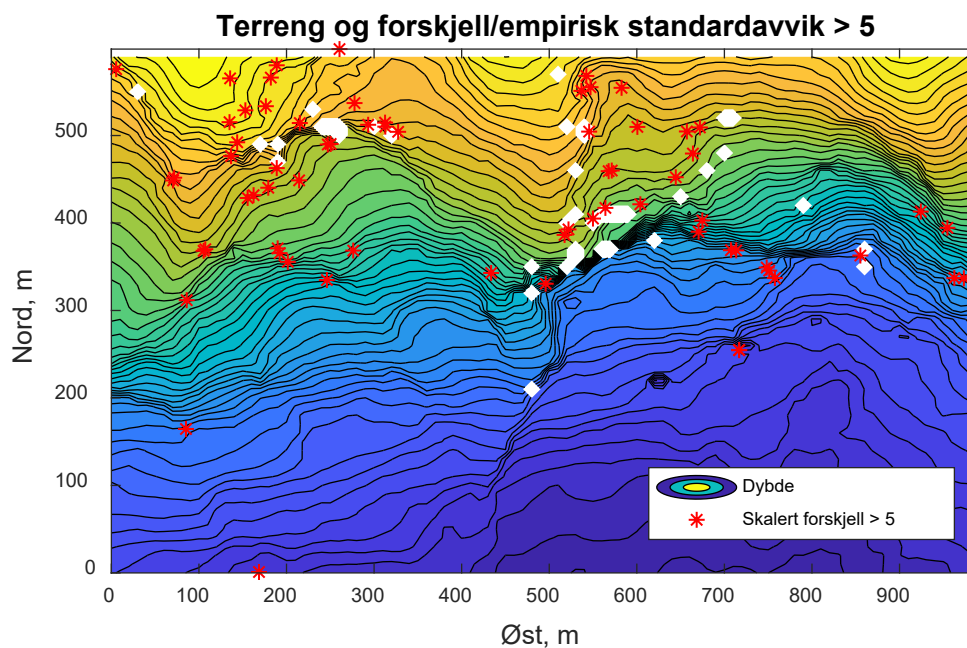


Figur 3.8 Sammenhengen mellom normaliserte forskjeller og antall målinger



Figur 3.9 Normaliserte forskjeller og antall målinger, detalj

Størstedelen av de store normaliserte forskjellene har to – tre målinger for ruten, den største har to målinger og et empirisk standardavvik på bare 7 millimeter. Terrenget spiller også en viktig rolle, jevnt over er de største avvikene i terrenget med stor variasjon, se Figur 3.10.



Figur 3.10 Terrenget og stor forskjell/empirisk standardavvik

---

---

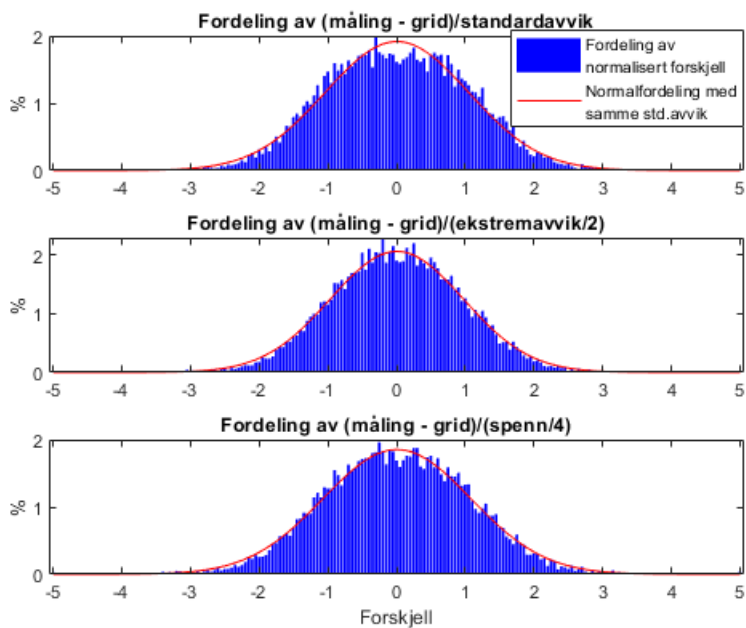
### 3.1.3 Undersøkelse av usikkerhetsparametere

I de følgende tre seksjonene vil vi undersøke mulige usikkerhetsparametere. Kandidatene er standardavvik, ekstremverdi og spenn. Undersøkelsen for ekstremavvik og spenn er gjort to ganger, en gang for å finne skaleringsfaktoren ( se seksjon 2.1.1), og så en gang med skalerte verdier. Detaljresultatene for den første undersøkelsen vil ikke gjengis, men konklusjonen var at med litt avrunding, så ga ekstremavvik/2 og spenn/4 gode estimatorer for  $\sigma$ . Undersøkelsen som gjengis i de neste avsnittene er gjort med normaliserte verdier, det vil si at hver forskjell mellom kontroll og grid er delt på  $\bar{\sigma}$  for den aktuelle gridruten. Dersom  $\bar{\sigma}$  er en god estimator, vil den resulterende fordelingen for alle målinger være normalfordelt med standardavvik 1, dvs.  $N(0,1)$ . Standardavviket til samlingen av forskjeller bør da være ca. 1,0, og 1. og 99. persentil bør være ca.  $\pm 2,33$ . Ca. 0,27 % av målingene kan ligge utenfor  $\pm$  tre standardavvik. Alle kandidatene har urimelige ekstremverdier når alle målinger brukes. I denne sammenhengen bør det gjentas at sannsynligheten for store ekstremverdier øker med antall målinger. For ca. 18000 normaliserte forskjeller, som vi har her, er det ca. 1 % sannsynlig at normalfordelingen gir en minimumsverdi mindre eller lik  $-5$ , eller maksimumsverdi større eller lik  $5$ .

Skaleringsfaktorene for ekstremverdier og spenn som ble funnet for dette gridet, vil også bli benyttet for undersøkelsene av Område 2. Dette er ut fra en antagelse om at det gir en klarere framstilling enn å beregne nye skaleringsfaktorer for hvert grid.

### 3.1.4 Fordelinger for normaliserte forskjeller

Figur 3.11 viser fordelingene for forskjellene normalisert med de forskjellige usikkerhetsparametere. Histogrammene er kuttet ved  $\pm 5$ , selv om fordelingen strekker seg lenger. Alle fordelingene ser noenlunde normalfordelte ut, selv om de kanskje er litt lette i senter. Dette gjelder spesielt normaliseringen med standardavvik.



Figur 3.11 Fordeling av normaliserte forskjeller,  $N > 5$

### 3.1.5 Statistikk for normalisering med standardavvik for ruten

Statistikken er gitt i Tabell 3.3. Dersom alle forskjeller med mer enn en måling brukes, får man lange haler og en ekstrem minimumsverdi. Dersom man bare bruker data når  $N > 5$  eller  $N > 10$  nærmer man seg en normalfordeling. Persentilverdiene er da for det meste knapt i underkant. Ekstremverdiene ligger litt langt unna senter for et nominelt standardavvik på 1. Det er litt mange målinger utenfor +/- tre standardavvik, men neppe signifikant, og færre enn for de to andre parameterkandidatene.

Mål-inger i ruten	Gjennom-snitt	Standard-avvik	Minimum	1. persentil	99. persentil	Maksimum	% utenfor +/- 3 st.avvik
$N > 1$	-0,01	1,97	-214,3	-2,37	2,42	13,1	0,08
$N > 5$	0,01	1,04	-7,2	-2,28	2,33	6,0	0,37
$N > 10$	0,01	1,03	-7,2	-2,25	2,30	6,0	0,33

Tabell 3.3 Statistiske resultater for forskjeller delt på empirisk standardavvik



---

---

Det ekstreme minimumet for  $N > 1$  skyldes et svært lavt standardavvik. Faktisk forskjell, standardavvik og antall målinger er gitt i Tabell 3.4.

Rang Størst er #1	Faktisk forskjell	Standardavvik	Antall målinger
1	-1,52	0,007	2
2	-2,21	0,042	2
3	-11,45	0,580	2
4	-2,32	0,142	3
5	2,96	0,226	2

Tabell 3.4 Faktiske forskjeller for de 5 største normaliserte forskjellene,  $N > 1$

Nummer 3 er en ekstrem forskjell med et normalt standardavvik, ellers er ikke forskjellene avskrekkende selv om de passer dårlig med standardavviket. Alle de fem har svært få målinger/rute.

### 3.1.6 Statistikk for normalisering med ekstremavvik/2

Resultatene er gitt i Tabell 3.5 og Tabell 3.6. Dersom alle målinger brukes, får man lange haler og en ekstrem minimumsverdi. Legg merke til at persentilverdiene her ligger innenfor standardavviket. For  $N > 5$  og  $N > 10$  stemmer det ganske bra med normalfordelingen. For  $N > 5$  stemmer standardavvik og persentilverdier godt, mens for  $N > 10$  gir denne parameteren en noe smalere fordeling enn en normalfordeling.  $N > 10$  har samtidig mindre og mer symmetriske ekstremverdier enn  $N > 5$ . Målt i antall standardavvik ligger de nærmere senter enn de tilsvarende verdiene for normalisering med standardavviket. For  $N > 5$  er det litt mange målinger utenfor +/- tre standardavvik.

Målinger i ruten	Gjennomsnitt	Standardavvik	Minimum	1. persentil	99. persentil	Maksimum	% utenfor +/- 3 st.avvik
N > 1	-0,04	4,81	-606,0	-2,50	2,48	37,0	0,06
N > 5	0,00	0,97	-7,6	-2,23	2,25	10,8	0,61
N > 10	0,01	0,91	-5,0	-2,04	2,08	5,13	0,34

Tabell 3.5 Statistiske resultater for forskjeller delt på ekstremavvik/2

Rang	Faktisk forskjell	Ekstremavvik/2	Antall målinger
Størst er #1			
1	-1,52	0,003	2
2	-2,21	0,015	2
3	-11,45	0,205	2
4	2,96	0,080	2
5	-2,32	0,080	3

Tabell 3.6 Faktiske forskjeller for de 5 største normaliserte forskjellene,  $N > 1$

Forskjell nr. tre er den samme som for normalisering med standardavvik, men ekstremavvik/2 verdien er relativt sett mindre. De andre forskjellene er ikke avskrekkende.

### 3.1.7 Statistikk for normalisering med spenn/4

Resultatene er gitt i Tabell 3.7 og Tabell 3.8. Dersom alle målinger brukes, får man lange haler og en ekstrem minimumsverdi. Legg merke til at persentilverdiene også her ligger innenfor standardavviket. For  $N > 5$  og  $N > 10$  stemmer det ganske bra med normalfordelingen. For  $N > 5$  ligger persentilverdiene litt lenger fra sentrum enn normalfordeling vil gi,  $N > 10$  ligger så vidt under normalfordelingen.  $N > 10$  har også mindre og mer symmetriske ekstremverdier enn  $N > 5$ . Målt i antall standardavvik ligger de nærmere senter enn de tilsvarende verdiene for

empirisk standardavvik, og er så godt som like de for ekstremavvik. For  $N > 5$  er det litt mange målinger utenfor +/- tre standardavvik.

Målinger i ruten	Gjennomsnitt	Standardavvik	Minimum	1. persentil	99. persentil	Maksimum	% utenfor +/- 3 st.avvik
$N > 1$	-0,04	4,84	-606,0	-2,77	2,76	37,0	0,06
$N > 5$	0,01	1,08	-7,8	-2,46	2,51	11,1	0,56
$N > 10$	0,01	1,02	-5,6	-2,26	2,30	5,3	0,36

Tabell 3.7 Statistiske resultater for forskjeller delt på spenn/4

Rang	Faktisk forskjell	Spenn/4	Antall målinger
Størst er #1			
1	-1,52	0,003	2
2	-2,21	0,015	2
3	-11,45	0,205	2
4	2,96	0,080	2
5	-2,32	0,068	3

Tabell 3.8 Faktiske forskjeller for de 5 største normaliserte forskjellene,  $N > 1$

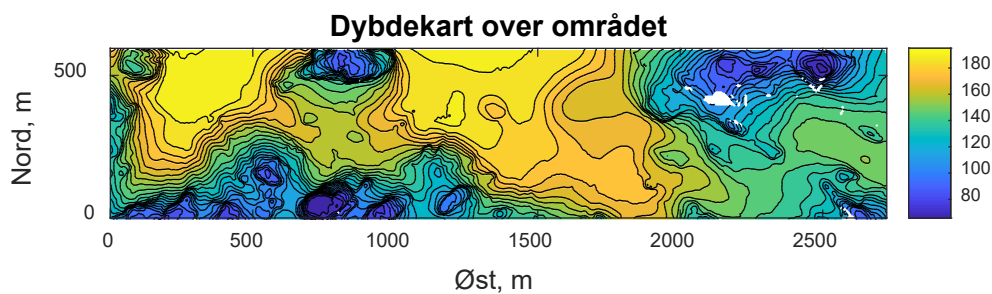
Resultatene for de største normaliserte forskjellene er som for de to andre kandidatene, kommentarene likeså.

### 3.2 Område 2 – 5 meters grid

Området er et kupert terreng utenfor kysten. Det er laget tre grid fra dette området for å kunne analysere flere effekter enn med et enkelt grid. Det første er et grid med 5 meter horisontal oppløsning hvor alle råmålinger utenom kontrollpunktene er brukt i gridet. Noe over syv millioner målinger er brukt til å lage kartet, mens nesten 800 000 ble holdt utenom og brukt som kontrollpunkter. Det er i alt 65520 ruter i gridet, av disse er 215 uten målinger, 100 har 5 eller færre målinger og 195 har 10 eller færre. Gjennomsnittet er 109 målinger/rute, maksimum 1450

---

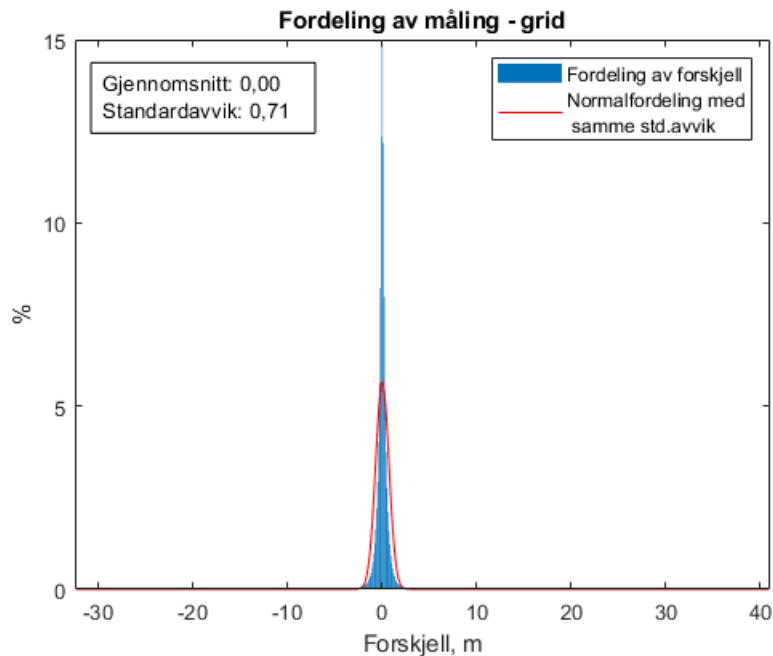
målinger i en rute. Gjennomsnittlig standardavvik/rute er 0,44 m, gjennomsnittlig ekstremavvik 1,06 m og gjennomsnittlig spenn 1,86 m.



Figur 3.12 Dybdekart over området

### 3.2.1 Rå fordeling

Fordelingen av (måling – grid) for kontrollpunktene er vist i Figur 3.12.



Figur 3.13 Fordeling av (måling – kart)

Fordelingen strekker seg fra -32,4 til 41,0. Fordelingen er symmetrisk, men spissere og bredere enn en normalfordeling med samme standardavvik. 1. og 99. persentil ligger på 2,59

standardavvik. 1,51 % av forskjellene er større enn tre standardavvik. Ekstremverdiene ligger også langt unna senter.

Tabell 3.9 gir statistikk for alle forskjeller i ruter med mer enn 1 måling, alle forskjeller i ruter med mer enn 5 målinger, og alle forskjeller i ruter med mer enn 10 målinger. Resultatene er omtrent de samme når man har med alle målinger som når man bare har med ruter med over fem eller 10 målinger, forskjellene kommer typisk i tredje eller fjerde desimal. Dette skyldes at det er veldig få ruter med få målinger. For eksempel er bare 42 av nesten 800 000 kontrollpunkt i ruter med fem eller færre målinger.

Målinger i ruten	Gjennomsnitt	Standardavvik	Minimum	1. persentil	99. persentil	Maksimum	% utenfor +/- 3 st.avvik
N > 1	0,00	0,71	-32,4	-1,84	1,84	41,0	1,51
N > 5	0,00	0,70	-32,4	-1,84	1,84	41,0	1,51
N > 10	0,00	0,70	-32,4	-1,84	1,84	41,0	1,51

Tabell 3.9 Statistiske resultater for rå forskjeller

De største forskjellene er vist Tabell 3.10.

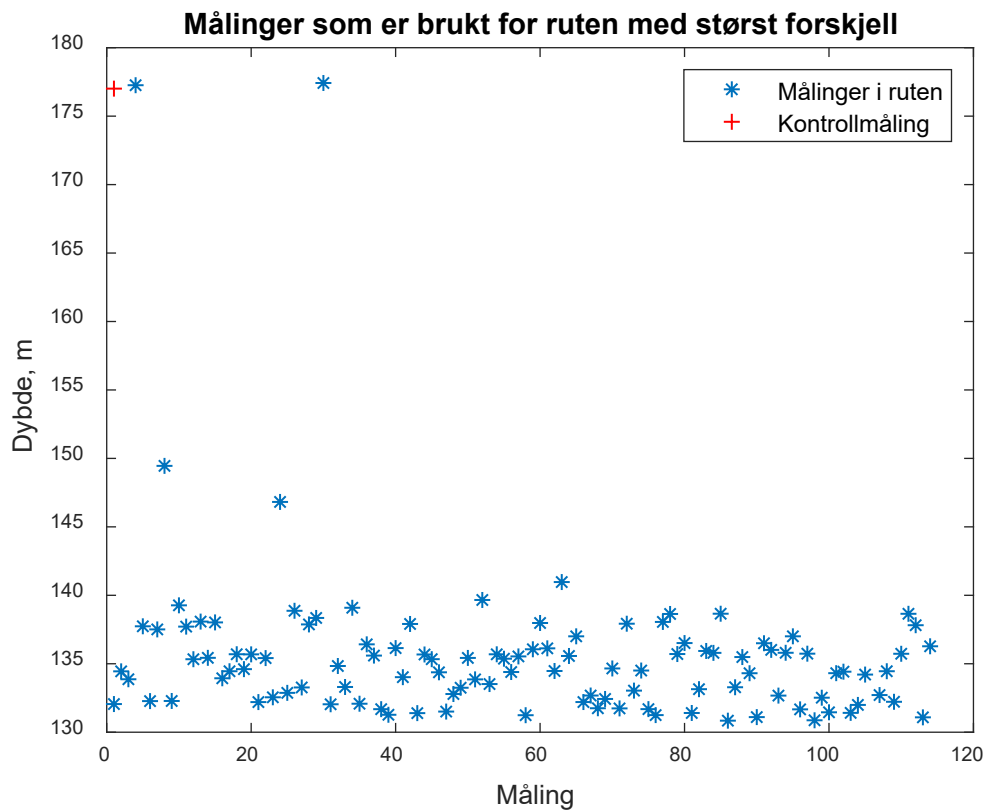
Rang	Faktisk forskjell	Standardavvik	Ekstremavvik	Spenn	Antall målinger
Størst er #1					
1	40,98	7,44	41,39	46,58	114
2	40,11	7,44	41,39	46,58	114
3	-32,39	7,16	32,54	41,08	271
4	30,41	14,86	31,98	42,88	85
5	30,07	12,61	30,57	44,81	142

Tabell 3.10 De 5 største forskjellene

De tre største forskjellene, hvor to er fra samme rute, er større enn standardavviket skulle tilsi, men veldig nære ekstremavviket. Ekstremavviket har altså plukket opp en spredning som ikke kommer klart fram i standardavviket. Spennet ligger på rundt seks standardavvik for disse

---

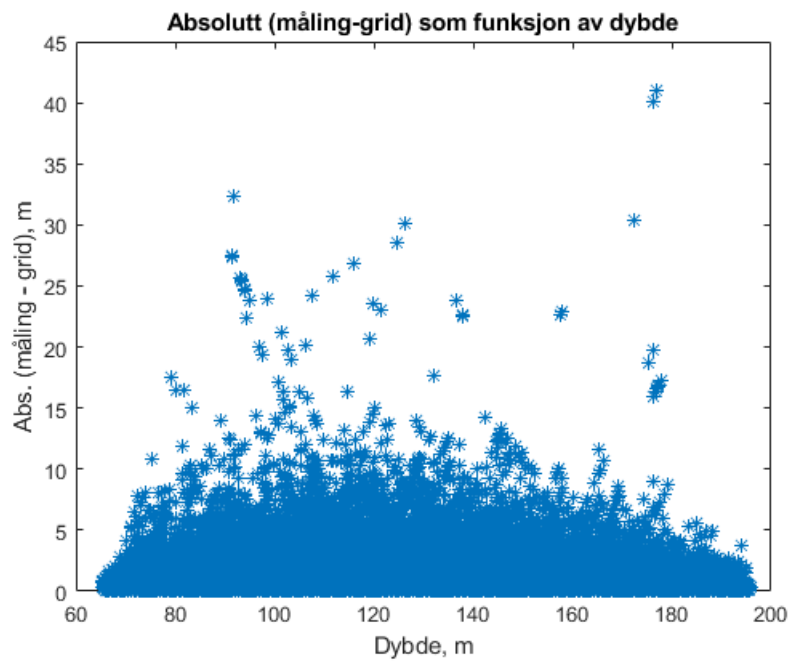
rutene, og gir dermed lite ny informasjon. Figur 3.14 viser målingene som er brukt for å bygge ruten med størst forskjell.



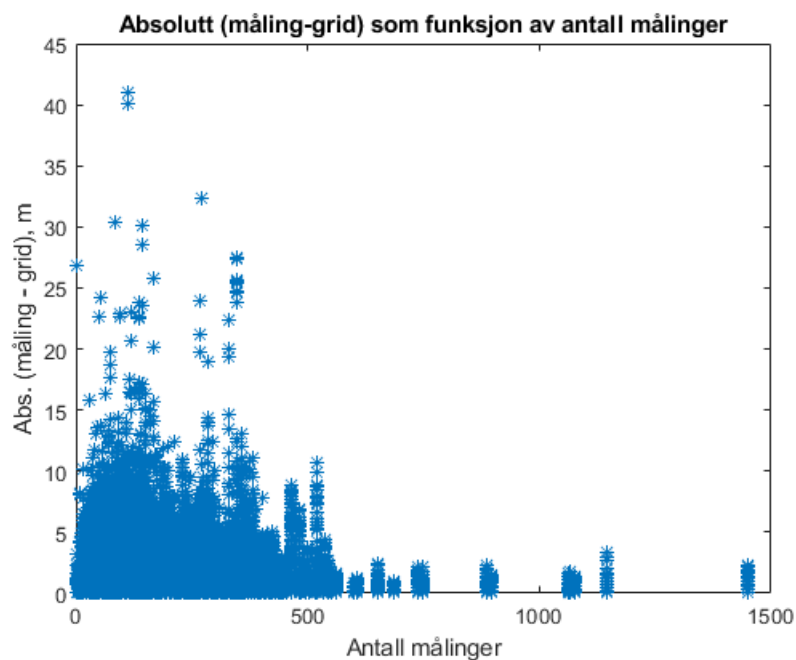
*Figur 3.14 Målinger og kontrollmåling for ruten med størst forskjell*

Dette er et tilfelle hvor det egentlig virker urimelig å betrakte dette som et sett målinger fra en og samme fordeling. Undersøkelsen i [3] viste tilsvarende effekter.

### 3.2.2 Mulige sammenhenger

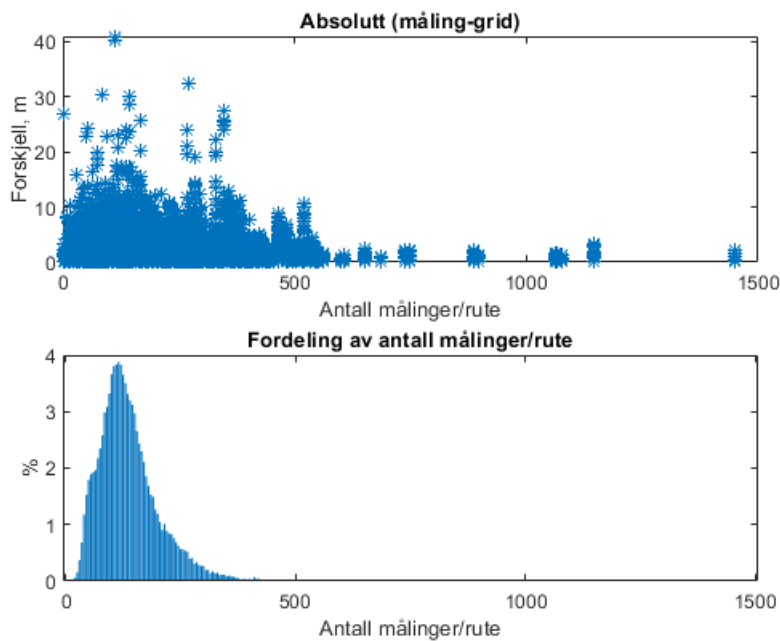


Figur 3.15 Forskjellen mellom måling og grid som funksjon av dybde  
Figur 3.15 viser ingen klar sammenheng mellom forskjeller og dybde.

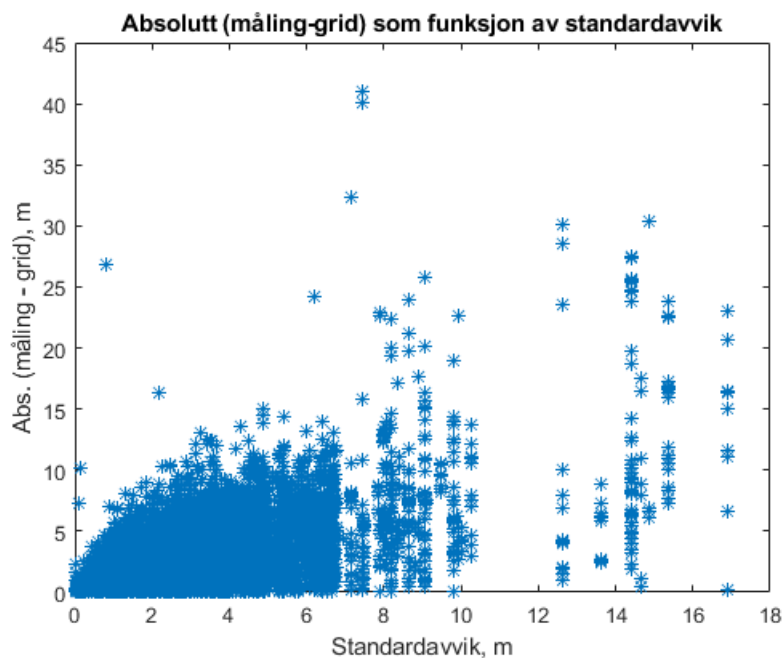


Figur 3.16 Forskjellen mellom måling og kart som funksjon av antall målinger

I Figur 3.16 er nok den tilsynelatende sammenhengen mellom forskjeller og antall målinger mest et resultat av den store andelen målinger/rute mellom 1 og 300, se Figur 3.17.



Figur 3.17 Sammenhengen mellom forskjell og antall målinger



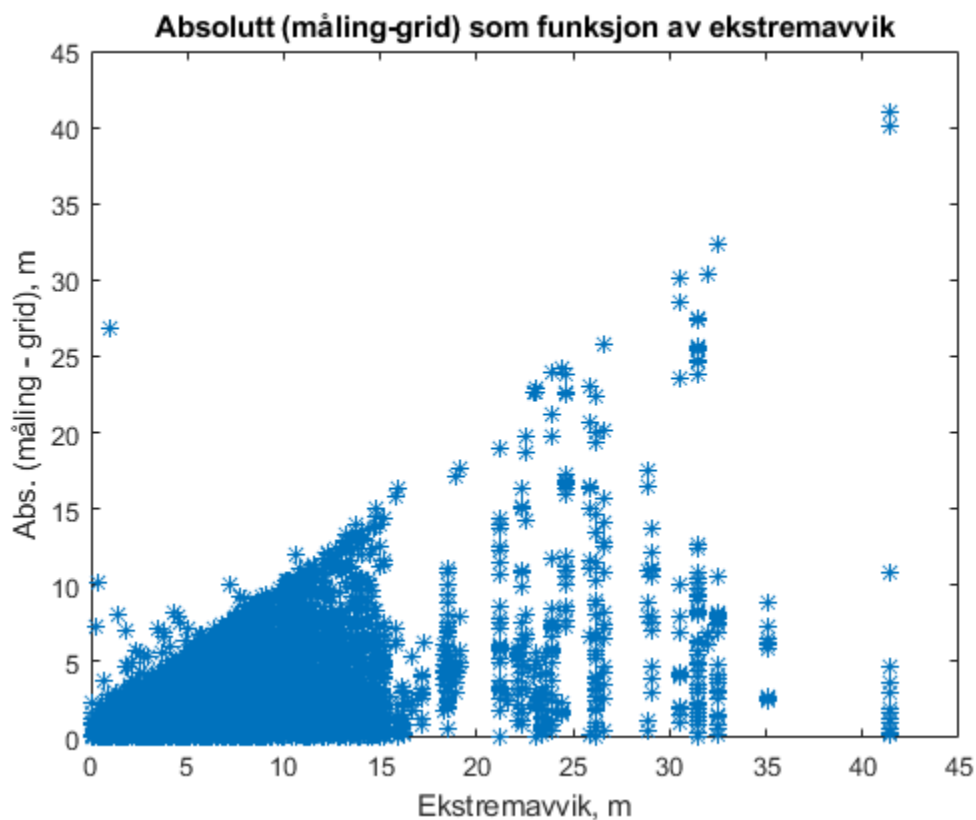
Figur 3.18 Forskjellen mellom måling og kart som funksjon av standardavvik



---

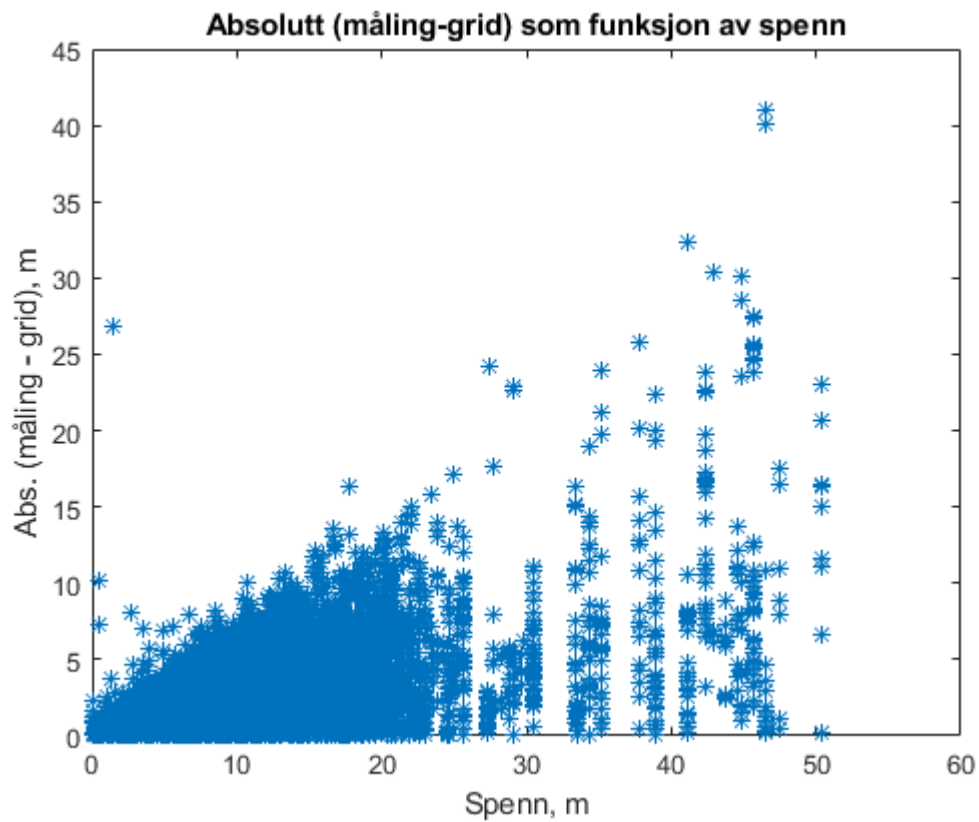
---

Figur 3.18 viser en klar sammenheng mellom forskjeller og rutenes standardavvik. Samtidig er det en del forskjeller som ligger langt over det rutes standardavvik skulle tilsi.



Figur 3.19 Forskjellen mellom måling og kart som funksjon av ekstremavvik

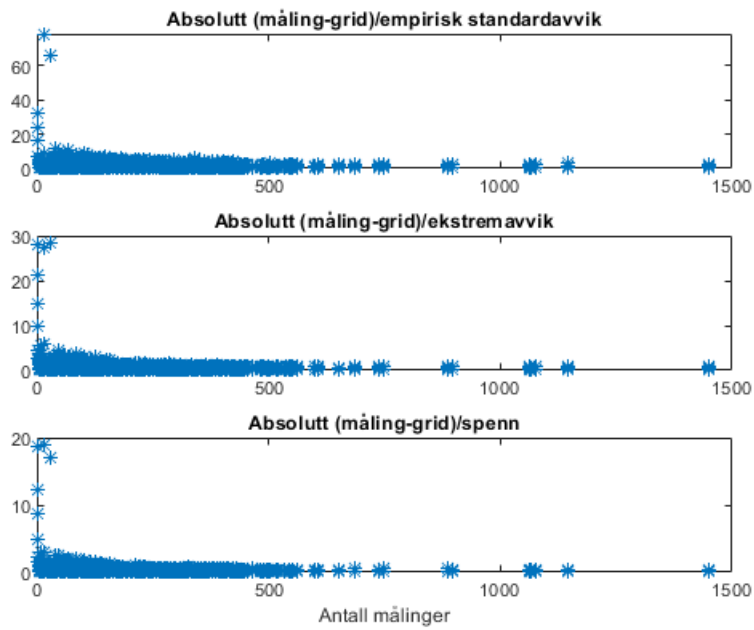
Sammenhengen i Figur 3.19 er klarere enn for standardavvik, og det er færre forskjeller som ligger uventet høyt enn det var for standardavviket i Figur 3.18.



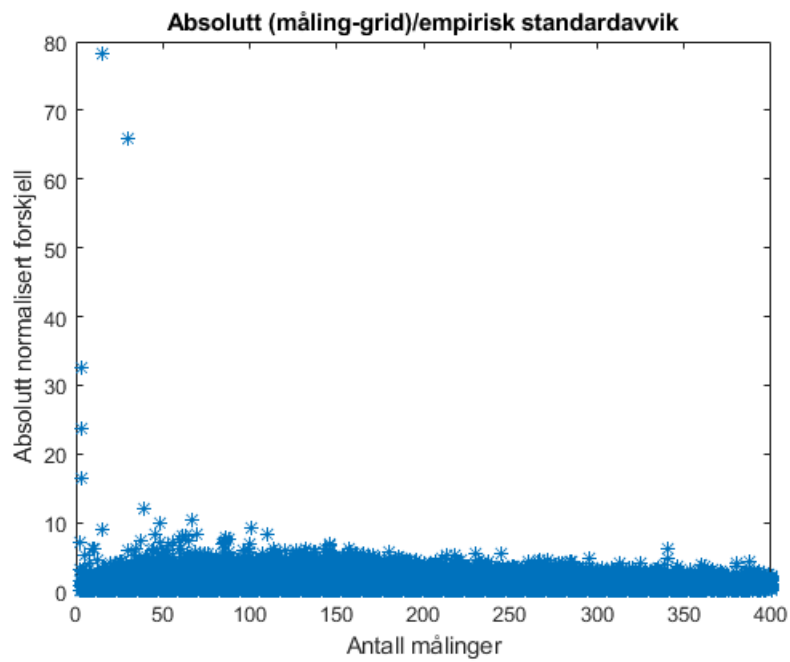
*Figur 3.20 Forskjellen mellom måling og kart som funksjon av spenn*

Sammenhengen mellom forskjell og spenn i Figur 3.20 er som for ekstremavviket.

Ser man på normaliserte forskjeller som funksjon av antall målinger (Figur 3.21 og Figur 3.22), får man en viss sammenheng. Den er imidlertid ikke på langt nær så klar som for Område 1.



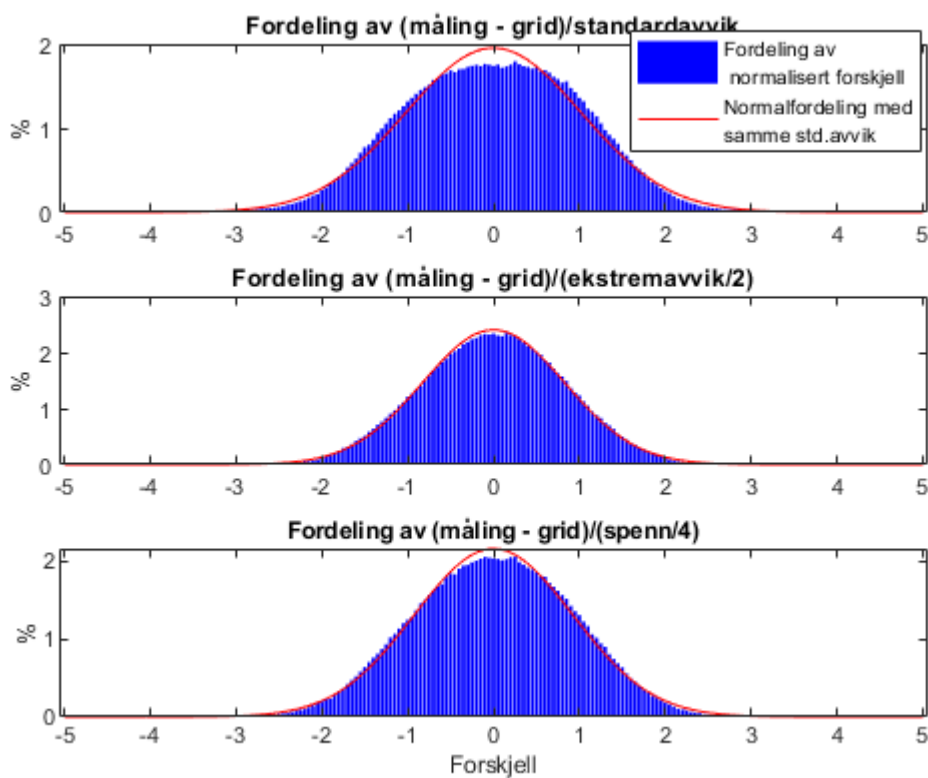
Figur 3.21 Sammenhengen mellom normaliserte forskjeller og antall målinger



Figur 3.22 Normaliserte forskjeller og antall målinger, detalj

### 3.2.3 Fordelinger for normaliserte forskjeller

Figur 3.23 viser fordelingene for forskjellene normalisert med de forskjellige usikkerhetsparameterne. Histogrammene er kuttet ved +/- 5, selv om fordelingen strekker seg lenger. Alle fordelingene ser noenlunde normalfordelte ut, men normaliseringen med standardavvik er litt lett i senter.



Figur 3.23 Fordeling av normaliserte forskjeller.  $N > 5$ .

### 3.2.4 Statistikk for normalisering med standardavvik for ruten

Statistikken er gitt i Tabell 3.11. Ekstremverdiene er store, men de andre statistiske verdiene passer ganske bra med en normalfordeling. Resultatene er omtrent de samme når man har med alle målinger som når man bare har med ruter med over fem eller 10 målinger, på samme måte og av samme grunn som de rå fordelingene.

Målinger i ruten	Gjennomsnitt	Standardavvik	Minimum	1. persentil	99. persentil	Maksimum	% utenfor +/- 3 st.avvik
N > 1	0,00	1,02	-65,8	-2,25	2,21	78,2	0,26
N > 5	-0,00	1,02	-65,8	-2,25	2,21	78,2	0,27
N > 10	0,00	1,02	-65,8	-2,25	2,21	78,2	0,26

Tabell 3.11 Statistiske resultater for forskjeller delt på empirisk standardavvik

Detaljene for de fem største normaliserte forskjellene er gitt i Tabell 3.12, Den viser at nummer 4 og 5 har små standardavvik. Nummer tre har et normalt standardavvik, men ruta har bare tre målinger. Nummer 1 og 2 har over 10 målinger og lave standardavvik, men ettersom gjennomsnittlig standardavvik for gridet er 0,44 kan de ikke karakteriseres som unormalt lave.

Rang	Faktisk forskjell	Standardavvik	Antall målinger
Størst er #1			
1	10,22	0,131	15
2	-7,33	0,111	30
3	-26,83	0,827	3
4	-1,28	0,054	3
5	-0.89	0,054	3

Tabell 3.12 Faktiske forskjeller for de 5 største normaliserte forskjellene,  $N > 1$

### 3.2.5 Statistikk for normalisering med ekstremavvik/2

Statistikken er gitt i Tabell 3.13. Standardavvik, persentiler og andel utenfor +/- 3 standardavvik viser at ekstremavvik/2 er et for høyt estimat for sant standardavvik for hver enkelt rute. De er imidlertid innbyrdes konsistente.

Målinger i ruten	Gjennomsnitt	Standardavvik	Minimum	1. persentil	99. persentil	Maksimum	% utenfor +/- 3 st.avvik
N > 1	-0,00	0,83	-56,7	-1,85	1,83	54,5	0,11
N > 5	0,00	0,83	-56,7	-1,85	1,83	54,5	0,11
N > 10	0,00	0,83	-56,7	-1,85	1,83	54,5	0,11

Tabell 3.13 Statistiske resultater for forskjeller delt på ekstremavvik/2

De faktiske forskjellene for de største normaliserte forskjellene viser samme mønster som standardavviket. Her er den som skiller seg ut med et normalt ekstremavvik, stor forskjell og bare tre målinger nr. 2, se Tabell 3.14.

Rang	Faktisk forskjell	Ekstremavvik/2	Antall målinger
Størst er #1			
1	-7,33	0,129	30
2	-26,83	0,477	3
3	10,22	0,186	15
4	-1,28	0,030	3
5	-0.89	0,030	3

Tabell 3.14 Faktiske forskjeller for de 5 største normaliserte forskjellene, N > 1

### 3.2.6 Statistikk for normalisering med spenn/4 for ruten

Resultatene er gitt i Tabell 3.15 og Tabell 3.16. Standardavvik, persentiler og andel utenfor +/- 3 standardavvik viser at spenn/4 er et for høyt estimat for sant standardavvik for hver enkelt rute. De er nærmere enn ekstremavvik/2, og innbyrdes konsistente.

Målinger i ruten	Gjennomsnitt	Standardavvik	Minimum	1. persentil	99. persentil	Maksimum	% utenfor +/- 3 st.avvik
N > 1	-0,00	0,93	-74,5	-2,05	2,01	75,8	0,16
N > 5	-0,00	0,92	-67,9	-2,05	2,01	75,8	0,17
N > 10	-0,00	0,92	-67,9	-2,05	2,01	75,8	0,16

Tabell 3.15 Statistiske resultater for forskjeller delt på spenn/4

Rang	Faktisk forskjell	Spenn/4	Antall målinger
Størst er #1			
1	10,22	0,135	15
2	-26,80	0,360	3
3	-7,33	0,108	30
4	-1,28	0,026	3
5	-0,89	0,026	3

Tabell 3.16 Faktiske forskjeller for de 5 største normaliserte forskjellene,  $N > 1$

De faktiske forskjellene for de største normaliserte forskjellene viser samme mønster som standard- og ekstremavviket. Her er det nr. 2 som skiller seg ut med lavt til normalt spenn, stor forskjell og bare tre målinger. Dette er det samme kontrollpunktet som er en utfordring også for de andre usikkerhetsparameterne.

### 3.3 Område 2 – 5 meters grid og færre målinger

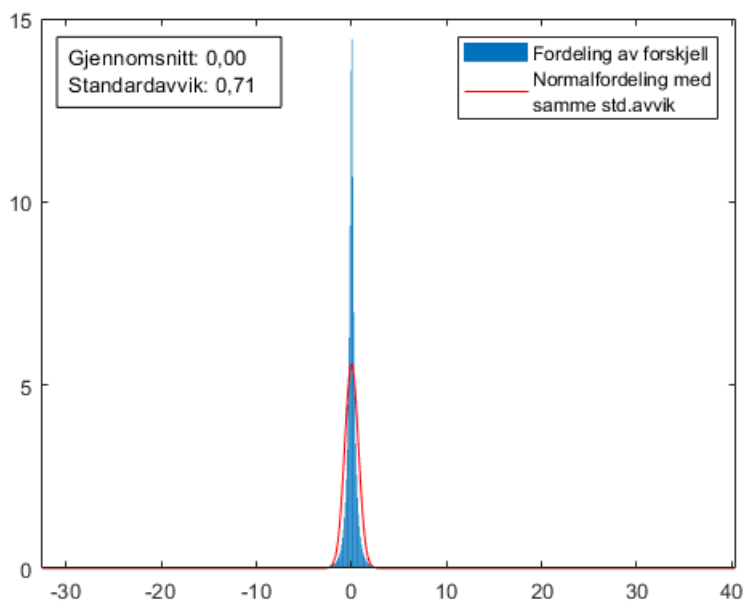
Området er også analysert med et 5 m grid med antall råmålinger redusert til 27,1 x antall ruter, i alt 1 775 592 målinger. Dette gir like mange målinger/rute som Område 1, men fire ganger så mange målinger/kvadratmeter. Det gir 275 tomme ruter, 978 ruter med fem eller færre målinger og 5970 med 10 eller færre. Gjennomsnittlig standardavvik/rute er 0,44 m, gjennomsnittlig ekstremavvik 0,89 m og gjennomsnittlig spenn 1,55 m. Det gjennomsnittlige standardavviket er det samme som når alle målinger brukes. Det er i sin tur en god indikasjon på at rutas standardavvik i hovedsak representerer terrengvariasjon og ikke målefeil. Gjennomsnittlig

---

spenn og gjennomsnittlig ekstremavvik er lavere enn når alle målinger brukes, dette kan skyldes at med færre målinger blir store ekstremverdier mindre sannsynlig.

### 3.3.1 Rå fordeling

Fordelingen av (måling – grid) for kontrollpunktene er vist under. Kontrollpunktene er de samme som tidligere.



Figur 3.24 Fordeling av (måling – kart)

Fordelingen strekker seg fra -32,6 til 40,4. Fordelingen er noenlunde symmetrisk, men spissere og bredere enn en normalfordeling med samme standardavvik. 1. og 99. persentil ligger på 2,6 standardavvik. 1,50 % av forskjellene er større enn tre standardavvik. Ekstremverdiene ligger også langt unna senter.

Tabell 3.17 gir statistikk for alle forskjeller i ruter med mer enn 1 måling, alle forskjeller i ruter med mer enn fem målinger, og alle forskjeller i ruter med mer enn 10 målinger. Verdiene er omtrent de samme som når alle målinger brukes, se Tabell 3.9.



Målinger i ruten	Gjennomsnitt	Standardavvik	Minimum	1. persentil	99. persentil	Maksimum	% utenfor +/- 3 st.avvik
N > 1	0,00	0,71	-32,6	-1,86	1,87	40,4	1,50
N > 5	0,00	0,71	-32,6	-1,86	1,87	40,4	1,50
N > 10	0,00	0,71	-32,6	-1,86	1,86	40,4	1,50

Tabell 3.17 Statistiske resultater for rå forskjeller

De fem største forskjellene er vist i Tabell 3.18.

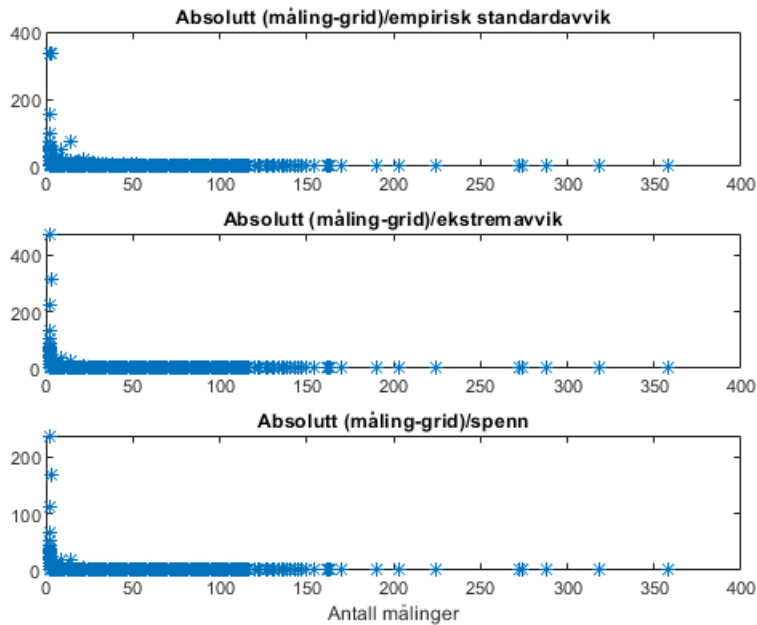
Rang Størst er #1	Faktisk forskjell	Standardavvik	Ekstremavvik	Spenn	Antall målinger
1	40,40	10,44	40,81	46,58	35
2	39,53	10,44	40,81	46,58	35
3	-32,56	7,48	32,66	41,04	81
4	31,76	10,49	26,66	39,17	27
5	30,25	10,49	26,66	39,17	27

Tabell 3.18 De 5 største forskjellene, N > 1

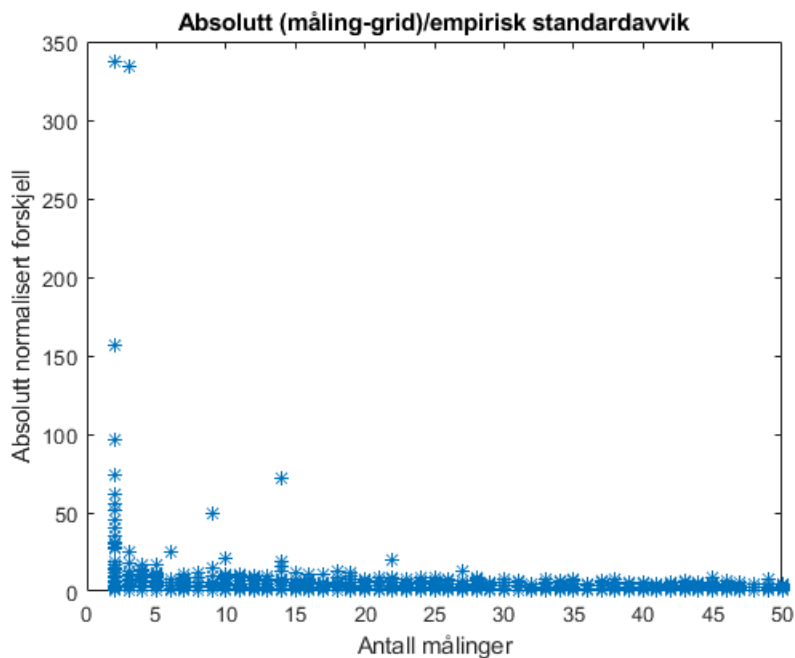
For de tre største forskjellene ligger forskjellen på rundt fire standardavvik, mens den dekkes godt av ekstremavviket. Spennet er litt lavt for forskjell nummer en og to når man tar hensyn til at det må skaleres. Forskjell nummer fire og fem dekkes av alle usikkerhetsparameterne.

---

Med et redusert antall råmålinger, og dermed færre målinger/rute, viser Figur 3.25 en sammenheng mellom skalerte målinger og antall målinger/rute som minner om Område 1.



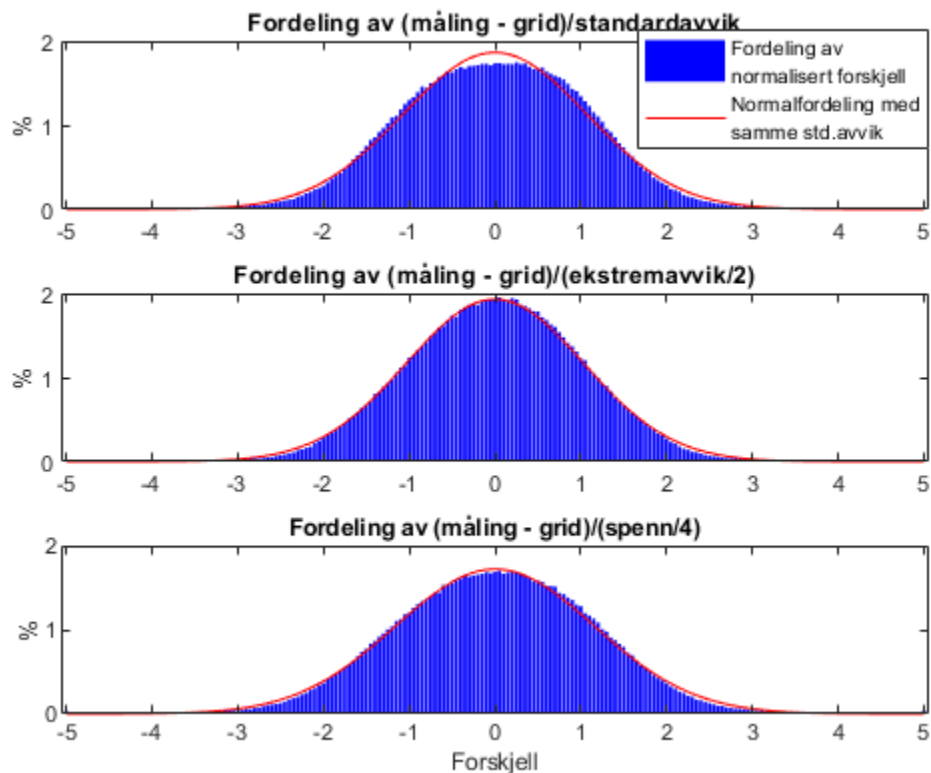
Figur 3.25 Sammenhengen mellom normaliserte forskjeller og antall målinger



Figur 3.26 Sammenhengen mellom normaliserte forskjeller og antall målinger, detalj

### 3.3.2 Fordelinger for normaliserte forskjeller

Figur 3.27 viser fordelingene for forskjellene normalisert med de forskjellige usikkerhetsparametrene. Histogrammene er kuttet ved +/- 5, selv om fordelingen strekker seg lenger. Alle fordelingene ser noenlunde normalfordelte ut, men normaliseringen med standardavvik er litt lett i senter.



Figur 3.27 Fordeling for normaliserte forskjeller,  $N > 5$

### 3.3.3 Statistikk for normalisering med standardavvik for ruten

Det empiriske standardavviket stemmer ganske bra med normalfordelingen når det er fem eller flere målinger. Med færre målinger blir standardavviket litt høyt, se Tabell 3.19.

Målinger i ruten	Gjennomsnitt	Standardavvik	Minimum	1. persentil	99. persentil	Maksimum	% utenfor +/- 3 st.avvik
N > 1	0,00	1,23	-95,9	-2,44	2,40	336,9	0,21
N > 5	-0,00	1,07	-49,6	-2,42	2,39	71,5	0,41
N > 10	-0,00	1,06	-19,7	-2,40	2,37	71,5	0,39

Tabell 3.19 Statistiske resultater for forskjeller delt på empirisk standardavvik

De største normaliserte forskjellene er et resultat av veldig små standardavvik for rutene. De har også bare tre eller færre målinger pr. rute, se Tabell 3.20.

Rang	Faktisk forskjell	Standardavvik	Antall målinger
Størst er #1			
1	3,10	0,009	2
2	10,24	0,031	3
3	1,44	0,009	2
4	-3,93	0,041	2
5	0,68	0,009	2

Tabell 3.20 Faktiske forskjeller for de 5 største normaliserte forskjellene, N > 1

### 3.3.4 Statistikk for normalisering med ekstremavvik/2

For kontrollpunkter med flere enn 5 målinger/rute fungerer ekstremavvik/2 godt. Med færre målinger/rute gir den for stort standardavvik for de normaliserte forskjellene, med andre ord er estimatet for lavt. Resultatene er gitt i Tabell 3.21.

Målinger i ruten	Gjennomsnitt	Standardavvik	Minimum	1. persentil	99. persentil	Maksimum	% utenfor +/- 3 st.avvik
N > 1	0,00	1,84	-271,3	-2,35	2,33	952,8	0,06
N > 5	-0,00	1,03	-71,9	-2,32	2,31	56,4	0,42
N > 10	0,00	1,01	-19,8	-2,28	2,26	56,4	0,37

Tabell 3.21 Statistiske resultater for forskjeller delt på ekstremavvik/2

Tabell 3.22 viser at de største normaliserte forskjellene er de samme som for normalisering med standardavvik. Alle er et resultat av svært små ekstremavvik, og har også bare to eller tre målinger for ruten.

Rang	Faktisk forskjell	Ekstremavvik/2	Antall målinger
Størst er #1			
1	3,10	0,003	2
2	10,24	0,016	3
3	1,44	0,003	2
4	-3,93	0,015	2
5	0,68	0,003	2

Tabell 3.22 Faktiske forskjeller for de 5 største normaliserte forskjellene,  $N > 1$

### 3.3.5 Statistikk for normalisering med spenn/4 for ruten

Tabell 3.23 viser at denne estimatoren gir for stort standardavvik for de normaliserte forskjellene, med andre ord er estimatet for lavt. Standardavvik og persentilverdier er noenlunde konsistente for  $N > 5$ .

Målinger i ruten	Gjennomsnitt	Standardavvik	Minimum	1. persentil	99. persentil	Maksimum	% utenfor +/- 3 st.avvik
N > 1	0,00	1,93	-271,3	-2,66	2,61	952,8	0,07
N > 5	-0,00	1,16	-78,0	-2,63	2,59	71,7	0,44
N > 10	0,00	1,13	-21,7	2,57	2,52	71,7	0,38

Tabell 3.23 Statistiske resultater for forskjeller delt på spenn/4

De faktiske forskjellene, gitt Tabell 3.24, viser samme mønster som standardavvik og ekstremavvik.

Rang	Faktisk forskjell	Spenn/4	Antall målinger
Størst er #1			
1	3,10	0,003	2
2	10,23	0,015	3
3	1,44	0,003	2
4	-3,93	0,015	2
5	0,68	0,003	2

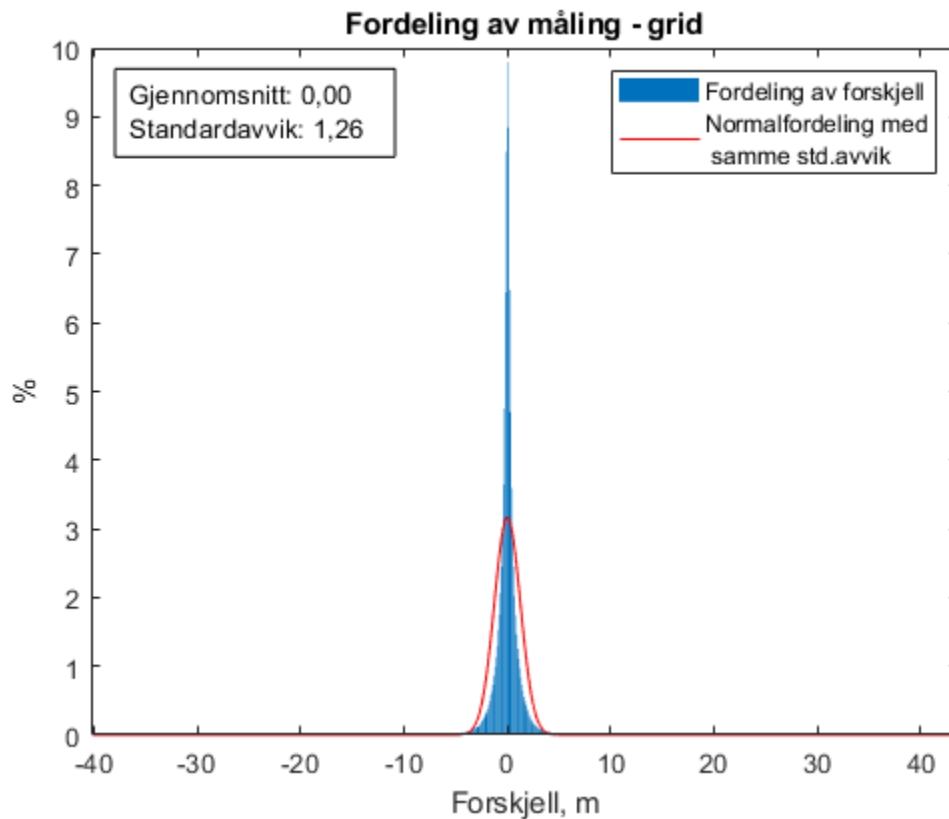
Tabell 3.24 Faktiske forskjeller for de 5 største normaliserte forskjellene, N > 1

### 3.4 Område 2 – 10 meters grid

Område 2 er også gjort til et 10 meters grid. Alle målinger utenom kontrollpunktene er brukt for å lage gridet. Det er da 16380 ruter i gridet, av disse er 25 tomme, 8 har fem eller færre målinger og 12 har 10 eller færre målinger. Effekten av få ruter med få målinger er den samme som i avsnitt 3.2. Gjennomsnittet er 438 målinger/rute, gjennomsnittlig standardavvik/rute er 0,80 m, gjennomsnittlig ekstremavvik 2,08 m og gjennomsnittlig spenn 3,58 m. For alle usikkerhetsparameterne er gjennomsnittet i underkant av det dobbelte av hva de var for 5 meters gridet med alle målinger.

### 3.4.1 Rå fordeling

Fordelingen av (måling – grid) for kontrollpunktene er vist i Figur 3.28.



Figur 3.28 Fordeling av (måling – kart)

Fordelingen strekker seg fra -40,2 til 43,7. Fordelingen er symmetrisk, men spissere og bredere enn en normalfordeling med samme standardavvik. 1. og 99. persentil ligger på +/- 2,8 standardavvik. 1,76 % av forskjellene er større enn tre standardavvik. Ekstremverdiene ligger også langt unna senter. I forhold til 5 meters gridet er dette en bredere fordeling som avviker mer fra en normalfordeling i halene.

Tabell 3.25 gir statistikk for alle målinger, alle målinger i ruter med mer enn fem målinger, og alle målinger i ruter med mer enn 10 målinger.

Målinger i ruten	Gjennomsnitt	Standardavvik	Minimum	1. persentil	99. persentil	Maksimum	% utenfor +/- 3 st.avvik
N > 1	-0,00	1,26	-40,2	-3,56	3,55	43,7	1,76
N > 5	-0,00	1,26	-40,2	-3,56	3,55	43,7	1,76
N > 10	0,00	1,26	-40,2	-3,56	3,55	43,7	1,76

Tabell 3.25 Statistiske resultater for rå forskjeller

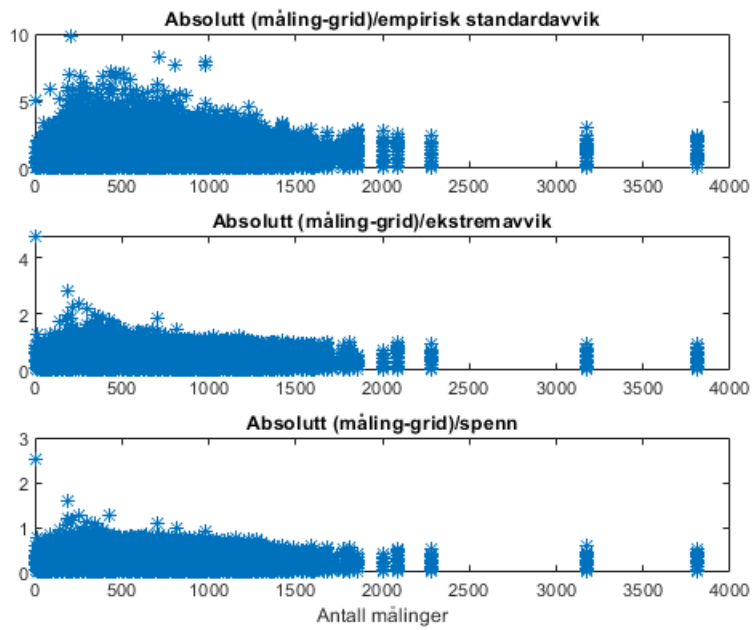
Tabell 3.26 viser at de tre største forskjellene har kontrollpunkt i samme rute, og at standardavviket gir en dårlig beskrivelse av usikkerheten i denne ruten.

Rang	Faktisk forskjell	Standardavvik	Ekstremavvik	Spenn	Antall målinger
Størst er #1					
1	43,67	9,24	43,87	52,21	594
2	43,29	9,24	43,87	52,21	594
3	42,42	9,24	43,87	52,21	594
4	-40,20	14,48	39,79	56,69	813
5	38,55	11,17	40,93	52,60	626

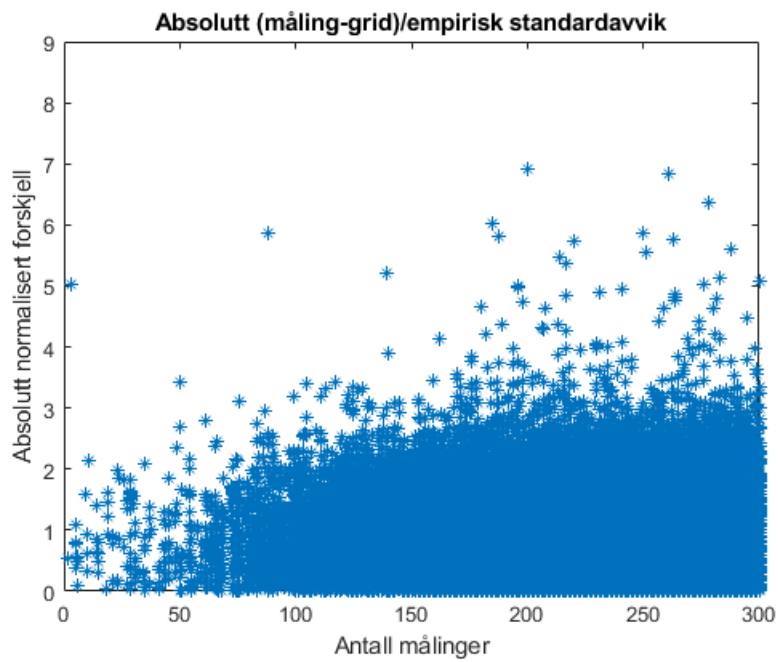
Tabell 3.26 De 5 største forskjellene

Figur 3.29 og Figur 3.30 viser ingen klar sammenheng mellom antall målinger og normaliserte forskjeller. Dette er ikke uventet, ettersom det er få ruter med lavt antall målinger. De største normaliserte forskjellene er mye mindre enn for fem meters gridet.





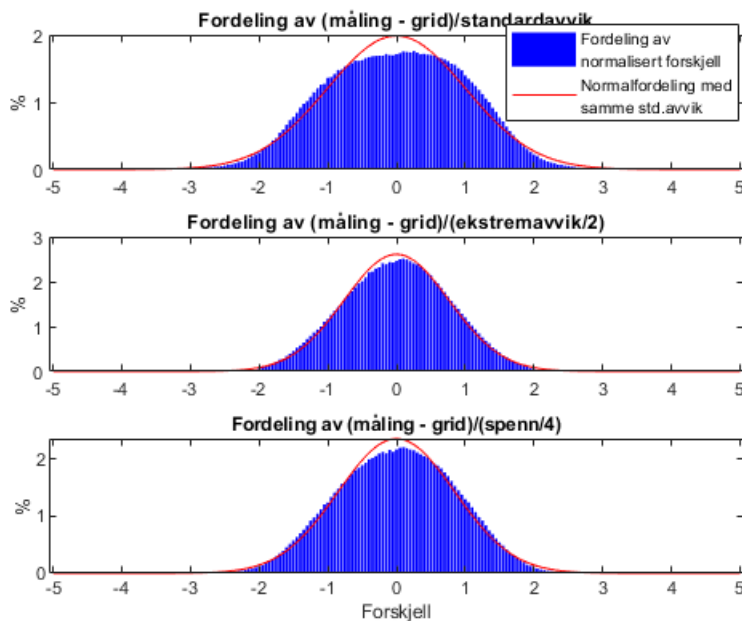
Figur 3.29 Sammenhengen mellom normaliserte forskjeller og antall målinger



Figur 3.30 Normaliserte forskjeller og antall målinger, detalj

### 3.4.2 Fordelinger for normaliserte forskjeller

Figur 3.31 viser fordelingene for forskjellene normalisert med de forskjellige usikkerhetsparametrene. Histogrammene er kuttet ved +/- 5, selv om fordelingen strekker seg lenger. Alle fordelingene ser noenlunde normalfordelte ut, men er litt lette i senter. Dette gjelder spesielt normaliseringen med standardavvik.



Figur 3.31 Fordeling av normaliserte forskjeller

### 3.4.3 Statistikk for normalisering med standardavvik for ruten

Det normaliserte standardavviket er 1,00, som er akkurat det det burde være. Persentilverdiene og andelen utenfor +/- 3 standardavvik er litt lave, men ikke kritiske. Resultatene er gitt i Tabell 3.27.

Målinger i ruten	Gjennomsnitt	Standardavvik	Minimum	1. persentil	99. persentil	Maksimum	% utenfor +/- 3 st.avvik
N > 1	-0,00	1,00	-7,7	-2,20	2,13	9,8	0,21
N > 5	-0,00	1,00	-7,7	-2,20	2,13	9,8	0,21
N > 10	-0,00	1,00	-7,7	-2,20	2,13	9,8	0,21

Tabell 3.27 Statistiske resultater for forskjeller delt på empirisk standardavvik

Ser man på de faktiske forskjellene for de største normaliserte forskjellene (Tabell 3.28), så er den største et resultat av et lavt empirisk standardavvik. De to med størst faktisk forskjell er ikke det, men er fra samme rute hvor standardavviket tydeligvis gir en dårlig beskrivelse av usikkerheten.

Rang	Faktisk forskjell	Standardavvik	Antall målinger
Størst er #1			
1	0,71	0,073	204
2	5,04	0,613	716
3	12,51	1,582	983
4	-1,66	0,215	810
5	12,12	1,582	983

Tabell 3.28 Faktiske forskjeller for de 5 største normaliserte forskjellene,  $N > 1$

### 3.4.4 Statistikk for normalisering med ekstremavvik/2

Tabell 3.29 viser at dette er et for høyt estimat av det sanne standardavviket.

Målinger i ruten	Gjennomsnitt	Standardavvik	Minimum	1. persentil	99. persentil	Maksimum	% utenfor +/- 3 st.avvik
$N > 1$	-0,00	0,76	-9,6	-1,70	1,68	4,7	0,03
$N > 5$	-0,00	0,76	-5,7	-1,70	1,68	4,7	0,03
$N > 10$	-0,00	0,76	-5,7	-1,70	1,68	4,7	0,03

Tabell 3.29 Statistiske resultater for forskjeller delt på ekstremavvik/2

Fire av de fem største normaliserte forskjellene er for ruter med lave ekstremavvik. Den gjenværende har en faktisk forskjell på -6,1 for et ekstremavvik/2 på 1,1. Se Tabell 3.30 for detaljer.

Rang Størst er #1	Faktisk forskjell	Ekstremavvik/2	Antall målinger
1	-1,58	0,165	3
2	-6.12	1,078	185
3	0,64	0,136	251
4	-1,29	0,284	217
5	0,57	0,129	304

Tabell 3.30 Faktiske forskjeller for de 5 største normaliserte forskjellene,  $N > 1$

### 3.4.5 Statistikk for normalisering med spenn/4 for ruten

De forskjellige parameterne viser at dette er et for høyt estimat av det sanne standardavviket, men ikke så mye for høyt som ekstremavviket/2. Se Tabell 3.31 for detaljer.

Målinger i ruten	Gjennomsnitt	Standardavvik	Minimum	1. persentil	99. persentil	Maksimum	% utenfor +/- 3 st.avvik
$N > 1$	-0,00	0,85	-10,1	-1,87	1,82	5,1	0,11
$N > 5$	-0,00	0,85	-6,4	-1,87	1,82	5,1	0,11
$N > 10$	-0,00	0,85	-6,4	-1,87	1,82	5,1	0,11

Tabell 3.31 Statistiske resultater for forskjeller delt på spenn/4,  $N > 1$

Når man ser på de faktiske forskjellene for de fem største normaliserte forskjellen (Tabell 3.32), så er resultatene adskillig dårligere enn for ekstremavvik. Tre av dem har det som virker som normale spenn/4, den største faktiske forskjellen er 13,66 med spenn/4 lik 2,66.

Rang Størst er #1	Faktisk forskjell	Spenn/4	Antall målinger
1	-1,58	0,156	3
2	-6.12	0,964	185
3	13,66	2,660	424
4	0,64	0,127	251
5	8,75	1,837	188

Tabell 3.32 Faktiske forskjeller for de 5 største normaliserte forskjellene

## 4 Drøfting og konklusjoner

Dette kapittelet vil oppsummere resultatene og anbefale hvilke parametere i tillegg til dybde som bør følge med hver gridrute.

### 4.1 Antall målinger

Det er helt klart at antall målinger i ruta er en parameter som bør med. Alle gridene har eksempler på at ved få målinger gir gjennomsnitt + spredningsparameter en dårlig beskrivelse av bunndybden innenfor en rute. Hva som kvalifiserer som 'få' er litt mer usikkert, men fem eller færre gjør det i alle fall. Intuitivt så bør det være en arealeffekt her, men den kommer ikke fram i undersøkelsene i denne rapporten.

### 4.2 Usikkerhetsparameter

Ingen av de undersøkte kandidatene klarer å beskrive absolutt alle ruter tilfredsstillende. Til en stor grad har dette sammenheng med antall målinger i ruta, men det er også eksempler hvor det ser ut til å være nok målinger rent numerisk sett og forskjellene er mye større enn usikkerheten skulle tilsi, se f. eks. Tabell 3.12, Tabell 3.14 og Tabell 3.16. Til sist så er det en del ruter med store forskjeller hvor usikkerhetsparameterne er lave i forhold til gjennomsnittet for gridet, selv om antall målinger ikke er spesielt lavt.

---

---

Det har ikke vært mulig å finne en konsistent skaleringsfaktor for ekstremavvik og spenn. Dette kan ha sammenheng med at ekstreme enkeltverdier blir mer sannsynlig jo flere målinger det er. Kombinasjonen av standardavvik og ekstremavvik er allikevel i stand til å vise at en fordeling ikke er normalfordelt, se Tabell 3.10 og tilhørende diskusjon. Spennet vil, i kombinasjon med standardavviket, kunne vise om bredden på fordelingen stemmer med en normalfordeling, men vil ikke nødvendigvis reagere på asymmetri.

Det empiriske standardavviket fungerer ganske godt som estimator for standardavviket, så lenge det er nok målinger. Det er også en velkjent størrelse for mange brukere, og det er god grunn til å anta at det allerede er i bruk i en del anvendelser. Det bør derfor prioriteres framfor spenn, og legges inn som et bånd i filene. Ekstremavviket har vist seg å gi nyttig informasjon når det ses i sammenheng med standardavviket, og bør også med. Det blir opp til brukerne å finne ut hvordan de vil benytte det.

### **4.3 Valgt filinnhold**

De fire båndene i filene bør brukes til: Gjennomsnittsdybde, standardavvik, ekstremavvik og antall målinger. Dersom det er mulig å legge inn gjennomsnittlig standardavvik/rute og ekstremavvik/rute som metainformasjon, bør det gjøres. Det vil gjøre det mulig å vurdere om standardavviket for en rute er urimelig lavt.

### **4.4 Eventuelle videre undersøkelser**

Det er et par emner det kan være fruktbart å undersøke videre. Det ene er sammenhengen mellom ruteareal og nødvendig antall målinger for å få et godt estimat av dybde og usikkerhet. Det andre er skaleringsfaktor for ekstremavvik, og evt. spenn, for å kunne bruke det som estimat av standardavviket. Denne skaleringsfaktoren har sannsynligvis en kobling til både ruteareal og antall målinger.

---

---

## Forkortelser

FFI Forsvarets forskningsinstitut

dvs det vil si

evt eventuelt

st standard

abs absolutt

m meter

---

## Referanser

- [1] "GeoPackage." [www.geopackage.org](http://www.geopackage.org) (accessed 2023-03-08)
- [2] "GPKG - GeoPackage raster." [gdal.org/drivers/raster/gpg.html](http://gdal.org/drivers/raster/gpg.html) (accessed 2023-03-08)
- [3] Magne Mandt og Jan Terje Bjørke, "Test av digitale terrengmodeller," FFI, FFI-notat 2010/02447, 2010
- [4] Richard J. Larsen and Morris L. Marx, An introduction to mathematical statistics and its applications, Second edition, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1986.



## Om FFI

Forsvarets forskningsinstitutt ble etablert 11. april 1946. Instituttet er organisert som et forvaltningsorgan med særskilte fullmakter underlagt Forsvarsdepartementet.

## FFIs formål

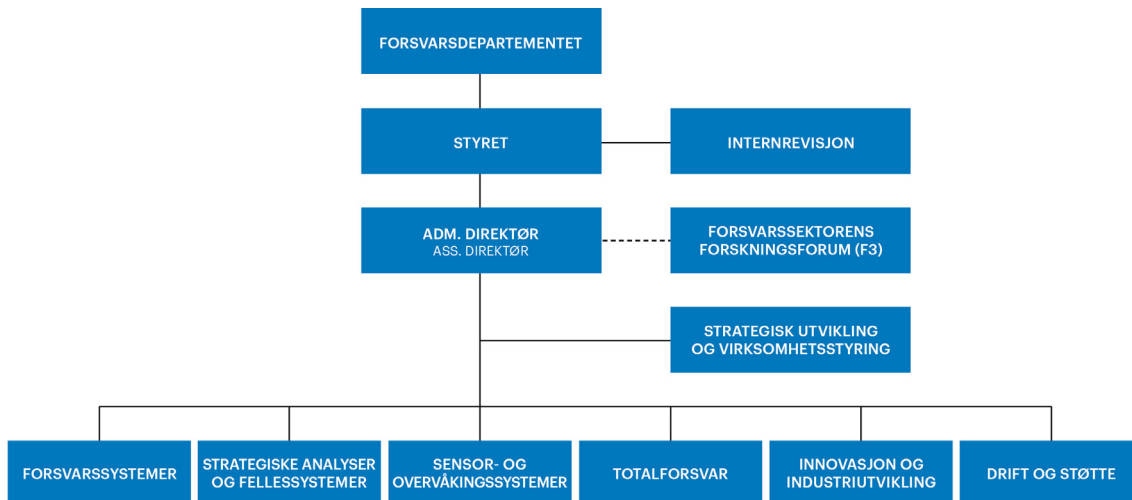
Forsvarets forskningsinstitutt er Forsvarets sentrale forskningsinstitusjon og har som formål å drive forskning og utvikling for Forsvarets behov. Videre er FFI rådgiver overfor Forsvarets strategiske ledelse. Spesielt skal instituttet følge opp trekk ved vitenskapelig og militærteknisk utvikling som kan påvirke forutsetningene for sikkerhetspolitikken eller forsvarsplanleggingen.

## FFIs visjon

FFI gjør kunnskap og ideer til et effektivt forsvar.

## FFIs verdier

Skapende, drivende, vidsynt og ansvarlig.



Forsvarets forskningsinstitutt (FFI)  
Postboks 25  
2027 Kjeller

Besøksadresse:  
Kjeller: Instituttveien 20, Kjeller  
Horten: Nedre vei 16, Karljohansvern, Horten

Telefon: 91 50 30 03  
E-post: [post@ffi.no](mailto:post@ffi.no)  
[ffi.no](http://ffi.no)

Norwegian Defence Research Establishment (FFI)  
PO box 25  
NO-2027 Kjeller  
NORWAY

Visitor address:  
Kjeller: Instituttveien 20, Kjeller  
Horten: Nedre vei 16, Karljohansvern, Horten

Telephone: +47 91 50 30 03  
E-mail: [post@ffi.no](mailto:post@ffi.no)  
[ffi.no/en](http://ffi.no/en)