



FFI Forsvarets
forskningsinstitutt

23/02189

FFI-RAPPORT

Laserstråling gjennom turbulent atmosfære

Del 3 – eksperiment

Andreas Schiller
Helge Fonnum
Espen Lippert

Laserstråling gjennom turbulent atmosfære

Del 3 – eksperiment

Andreas Schiller
Helge Fonnum
Espen Lippert

Emneord

Atmosfærisk turbulens
Laserstråler
Optiske systemer
Partielle differensialligninger
Statistiske metoder
Stokastiske prosesser

FFI-rapport

23/02189

Prosjektnummer

1602

Engelsk tittel

Laser beam through turbulent atmosphere
Part 3 – experiment

Elektronisk ISBN

978-82-464-3448-3

Godkjennerne

Halvor Bjordal, *forskningsleder*
Halvor Ajer, *forskningssjef*

Dokumentet er elektronisk godkjent og har derfor ikke håndskreven signatur.

Opphavsrett

© Forsvarets forskningsinstitutt (FFI). Publikasjonen kan siteres fritt med kildehenvisning.

Sammendrag

Prosjektet "Laservåpen og beskyttelse" innenfor forskningsprogrammet "Luftvern, ubemannede luftsystemer og laser" går ut på å utvikle høyeffektlasere som mottiltak mot innkommende projektiler, droner og liknende. Lasereffekten leveres på målet gjennom en typisk turbulent atmosfære. Derfor er det relevant å estimere påvirkningen som atmosfæren har på strålekvaliteten.

Denne rapporten er den tredje i en serie. Vi diskuterer her eksperimentelle resultater fra et feltforsøk.

Feltforsøket bidro først og fremst til kompetansebygging for videre forsøk med laserpropagasjon og strålelevering. Vi har prøvd ut analysemetoder som gir oss nyttig informasjon om intensitetsfordelingen på målet. Disse metodene avslørte problemer med laseroptikken, og vi lærte mer om hvilke kvalitetskrav metodene stiller til kameraene. Dette gjaldt spesielt muligheten til å kunne justere optikken i felt, redusere bakgrunnsstøyen i registreringene og synkronisere generelt.

Erfaringene fra feltforsøket gjør at vi neste gang ønsker å utvide eksperimentet til å inkludere lengre tidsrekker, kjappere bildefølger og generelt flere kjøring for flere detaljstudier.

Til tross for noen eksperimentelle mangler finner vi interessante resultater: Andre momentene til stråleforflytningen og korttids stråleforbredning ser ut til å være additive, og dette støtter antakelsen at disse prosessene er statistisk uavhengige. Videre fant vi at stråleforflytningen var i samsvar med modellene som finnes i tekstbøkene, for eksempel til Andrews og Phillips.

Forsøket ble gjennomført i oktober 2022 sørvest i Frankrike nær byen Toulouse i regi av det franske forskningsinstituttet ONERA.

Summary

The project "Laser weapons and protection" within the research program "Air defense, unmanned air systems and laser" involves developing high-power lasers as countermeasures against incoming projectiles, drones and the like. The laser effect is delivered on the target through a typically turbulent atmosphere. It is therefore relevant to estimate the influence of the atmosphere on the quality of the beam.

This report is the third in a series. Here, we discuss experimental results from a field trial.

The field trial primarily contributed to building expertise for further trials with laser propagation and beam delivery. We have explored analysis methods that give us useful information about the intensity distribution on the target. These methods revealed problems with the laser optics and we learned more about the quality requirements our methods impose on the cameras. This applies particularly to the ability to adjust the optics in the field, to reduce the background noise in the recordings and to synchronization in general.

Based on our experiences from the field trial, we would like to expand our next experiment to include longer time series, faster image sequences and generally more runs for more detailed studies.

Despite some experimental shortcomings, we find interesting results: The second moments of the beam displacement and short-time beam broadening appear to be additive, which supports the assumption that these processes are statistically independent. Furthermore, we find that the beam displacement is consistent with the models found in textbooks, for example the one by Andrews and Phillips.

The experiment was carried out in October 2022 in the south-west of France near the city of Toulouse under the auspices of the French research institute ONERA.

Innhold

Sammendrag	3
Summary	4
1 Innledning	7
2 Eksperimentelt oppsett	8
2.1 Testbane	8
2.2 Laserhodet	9
2.3 Utgangseffekt og pulset operasjon	10
2.4 Målskive og kamera	10
2.5 Synkronisering av laser og kamera	13
3 Dataanalyse	14
3.1 Bakgrunnssubtraksjon	14
3.2 Bildeutsnitt	16
3.2.1 Innledende observasjoner	16
3.2.2 Algoritme	17
3.3 Midlet bilde	19
3.3.1 Innledende betraktninger	19
3.3.2 Algoritme	21
3.4 Tidsrekker av strålemidtpunktet	31
3.4.1 Korrelasjoner i forflytningen av laserstrålene	31
3.4.2 Frekvensinnholdet i forflytningen av laserstrålene	33
3.4.3 Størrelsen til forflytningen av laserstrålen	36
3.5 Middel over tidsrekker av enkeltbilder	40
3.5.1 Vinkelfordelinger	41
3.5.2 Radiell fordeling	43
4 Resultater	46
5 Konklusjoner og utsyn	51
Vedlegg	
A Bakgrunnssubtraksjon	53
B Stråleforflytning	55
C Generaliseringer til Rayleighfordelingen	56
D Tolkning av autokorrelasjonsfunksjonen	59



1 Innledning

En teoretisk beskrivelse av laserstråling gjennom turbulent atmosfære slik som diskutert i delene I og II i denne rapportserien (FFI-Rapport 22/00075 og FFI-Rapport 22/00845) er komplisert og inneholder antagelser og forenklinger som i beste fall begrenser gyldighetsområdet til teorien. Utenfor gyldighetsområdet til de analytiske uttrykkene er det mulig å gjøre mer konkrete numeriske beregninger, men også disse bygger på antagelser som kan være uriktige. Særlig er det krevende å knytte resultater fra teori og numerikk til konkrete målbare meteorologiske parametre. Det er derfor helt avgjørende å gjøre eksperimentelle forsøk hvor man forsøker å knytte målbare meteorologiske data til påvirkning på strålepropagasjon.

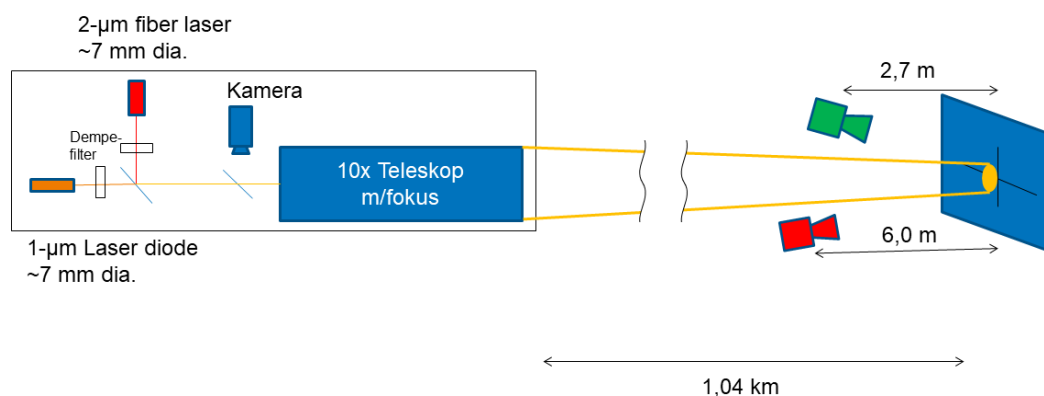
FFI jobber, gjennom sitt prosjekt *Laservåpen og beskyttelse*, med å frembringe kunnskap og teknologiske løsninger for laservåpen. I denne sammenhengen er evnen til å fokusere en laserstråle til en liten flekk på lang avstand svært viktig. Siden turbulenspåvirkning ikke bare er avhengig av atmosfæren, men også av strålestørrelse og fokusering er det verdifullt å gjøre forsøk hvor disse forholdene er relevante for anvendelsen. Dagens laservåpen benytter i stor grad 1 μm bølglengde, mest begrunnet i tilgjengelig laserteknologi. Denne bølglengden fungerer på mange måter godt og gjør det mulig å fokusere til små flekker på betydelig avstand. Det er desverre store utfordringer knyttet til øyesikkerheten forbundet med bruken av slike våpen. Faren for å blinde personer og sensorer som observerer målet under belysning er krevende å håndtere. Dersom man går til bølglengder lengre enn 1200 nm reduseres faren for blinding i praksis vesentlig, og den resterende risikoen blir mye lettere å håndtere. Dette er et av temaene i FFI-prosjektet hvor man vil utvikle laserteknologi på 2 μm . Det er derfor svært interessant å sammenligne turbulenspåvirkning av like stråler på 1 og 2 μm .

Natopanelet SET304 *Modeling, measuring, and mitigating optical turbulence* studerer avbildning gjennom turbulent atmosfære. Panelet arrangerte målekampanje 10. til 14. oktober 2022 ved den statlige franske institusjonen for luftfartsforskning ONERA sitt senter i Fauga-Mauzac, sør for Toulouse. Dette var en god anledning for å gjøre eksperimenter som er svært relevante for laservåpenanvendelser. Foruten Frankrike/ONERA var det på målekampanjen deltagere fra Canada, USA, Tyskland, Tyrkia, Nederland og Sverige. Fra FFI stilte Andreas Schiller, Espen Lippert og Helge Fonnum. Denne rapport beskriver disse eksperimentene og gjør en analyse av resultatene.

Rapporten er bygget opp slikt at det eksperimentelle oppsettet er beskrevet i kapittel 2. I kapittel 3 gir vi en svært detaljert gjennomgang av dataanalysen. Kapittel 4 oppsummerer hovedresultatene fra denne dataanalysen mens i kapittel 5 gir vi konklusjoner basert på disse resultater og prøver å se på videre muligheter. Vedleggene diskuterer detaljer til dataanalysen som hadde brutt opp flyten i teksten i en altfor stor grad. Når det gjelder fysikken, så baserer vi oss i stor grad på boken 'Laser Beam Propagation through Random Media' til L.C. Andrews og R.L. Phillips, mens matematikken er basert på bøkene 'Table of Integrals, Series and Products' til I.S. Gradshteyn og I.M. Ryzhik 7th ed. (engelsk oversettelse av russisk original) og 'Handbook of Mathematical Functions' til M. Abramowitz og I.A. Stegun. All numerikk er implementert ved hjelp av MATLAB programmet, versjon R2021b.

2 Eksperimentelt oppsett

Det eksperimentelle oppsettet består av et laserhode, hvor to lasere kobles sammen til én stråle og ekspanderes i et teleskop slik at strålen er 7 cm i diameter. De to laserne har hver sin bølgelengde på 1064 nm og 2036 nm (se figur 2.1). Teleskopet blir justert slik at det fokuserer laserstrålen på en målskive som står 1 km unna. Ved denne målskiva står det to kameraer som ser lysflekken som laserne lager på målskiva. De ser hver sin laser på grunn av forskjellig spektral følsomhet i kameranseorene.



Figur 2.1 Skisse av det eksperimentelle oppsettet. 1 µm og 2 µm laserlys kombineres til én stråle med diameter 7 cm som propageres 1 km før den treffer en skjerm. Lysflekken på skjermen avbildes av to kameraer, følsomme for henholdsvis 1 µm og 2 µm.

2.1 Testbane

ONERA har en 1 km lang og omtrent 20 m bred rett gresslette med en grusvei ved siden og laboratoriebygninger i hver ende, og det var her målekampanjen fant sted.



Figur 2.2 ONERAs 1 km lange bane ved senteret i Fauga-Mauzac sør for Toulouse. En 1 µm og 2 µm laser til venstre i bildet sendte lys over til en skjerm 1 km unna, til høyre i bildet. Foto: Google Maps.



Figur 2.3 ONERAs bane sett fra der laserhodet var plassert i retning der skjerm og kamera var plassert. Foto: ONERA.

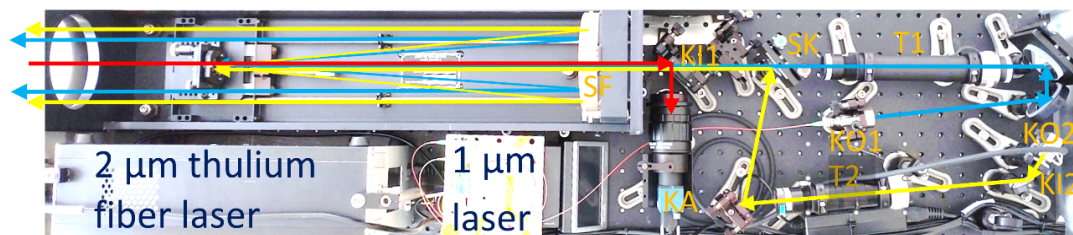
Under målekampanjen hadde FFI utplassert laserhodet med de to laserne i den ene enden av sletten og målskiva med kameraer i den andre, se figur 2.2. Ved både laserhodet og målskiva var laserstrålen ca. 1 m over bakken og som man kan se fra figur 2.3 så er grunnen svært flat slik at strålen holdt en tilnærmet konstant høyde hele veien. Den lave høyden over bakken gjør at turbulensen lett blir kraftig dersom bakken blir oppvarmet. Gjennom dagene hvor målingene pågikk varierte derfor turbulensen svært mye, fra nær null ved soloppgang og solnedgang til kraftig midt på dagen da solen stod på som mest.

Under målekampanjen ble alle relevante meteorologiske parameter målt, og man hadde et scintillometer som, ut fra målt scintillasjonsindeks, bestemmer styrken på turbulensen. Disse målingene er nyttige for å knytte våre målinger til andre lettere målbare størrelser.

2.2 Laserhodet

Laserkilden bestod av en fiberkoblet 1064 nm DFB-laser og en 2036 nm thuliumfiberlaser. Etter kollimering ble hver av laserne sendt gjennom hvert sitt teleskop for å muliggjøre individuell fokusering, samt å sørge for at begge stråler hadde samme 7 mm $1/e^2$ diameter. Thuliumlaseren gikk ikke stabilt ved ønsket utgangseffekt og laseren ble derfor kjørt på ca. 3 W og dempet til 250 mW ved å reflekteres på en CaF_2 kile. Strålene ble så kombinert på et speil som var transparent for 1 μm og høyreflekterende på 2 μm . Før strålen ble sendt ut, ble den forstørret til 7 cm diameter i et $\times 10$ speilteleskop. Speilteleskopet hadde også mulighet for fokusering, og denne ble benyttet for å minimere strålestørrelsen på 1 km. I vakuum vil en 7 cm stråle med strålekvalitet $M^2 = 1$ kunne gi et fokus på 1 km med diameter på 1 cm og 2 cm ved henholdsvis 1 μm og 2 μm .

Detaljene til laserhodet er vist i figur 2.4 og blir beskrevet i det følgende. Utgangseffekten tilsvarende 20 mW fra en 1064 nm fiberkoblet diodelaser kollimeres til en 7 mm stråle (KO1) og går gjennom



Figur 2.4 Laserhodets optiske utlegg (se tekst for detaljert beskrivelse). Foto: H. Fonnum ved FFI.

et 1:1 fokuseringsteleskop (T1). Utgangseffekten tilsvarende 3 W fra en 2036 nm thulium fiberlaser kollimeres til en 4,3 mm stråle (KO2). For å dempe effekten ned til 250 mW reflekteres strålen på en CaF_2 kile (KI2). Deretter forstørres strålen til 7 mm i et 10:16 fokuseringsteleskop (T2) før den kombineres med 1 μm strålen på strålekombineringspeilet (SK). Den kombinerte 1 μm og 2 μm strålen ekspanderes til en diameter på 7 cm i en 1:10 stråleforstørrer (SF) av typen SORL COAR 10x10Q. Laserstrålens treffpunkt avbildes ved hjelp av et kamera (KA) med 200 mm fokallengde som ser gjennom stråleforstørderen via en CaF_2 kile (KI1). Stråleforstørrer og linse gir en effektiv fokallengde på 2 m, og et synsfeltet i underkant av 4 mrad.

2.3 Utgangseffekt og pulset operasjon

For at de andre deltagerne på målekampanjen skulle kunne oppholde seg på banen uten vernebriller var det et krav at laseren var øyesikker, dvs. at den oppfyller strålingskravene til en sikkerhetsklasse 1 laser (se f.eks. FFI-Notat 22/01730). Det ble valgt å pulse laseren da dette gjorde det mulig å ha relativt høy effekt i pulsene uten å gå utover de tillatte grensene for eksponering. For å få fullt utbytte av den høye effekten i pulsene krevdes det at kamerasystemene var synkroniserte med pulsene (se figur 2.5 for et bilde av laserhodet med synkroniseringsenheten). Hvordan dette ble løst vil vi komme tilbake til. Laserpulsene var 750 μs lange med en repetisjonsrate på 50 Hz, og spisseffekten for 1 μm strålen var 20 mW og for 2 μm strålen 250 mW. Dette resulterer i gjennomsnittseffekter på henholdsvis 0,75 mW og 9,4 mW.

2.4 Målskive og kamera

Målskive og kameraer ble plassert på nordre enden av banen i en liten bygning for å skjerme målingen fra direkte sollys, se figur 2.6. Skjermen ble plassert innerst i et svartmalt rom, se figur 2.7, for å beskytte målingen mest mulig fra indirekte eller reflektert sollys. Laserlyset hadde fri vei inn til skjermen via en åpen port, se figur 2.6. Skjermen ble avbildet med et InGaAs kamera fra Goodrich (Sensors Unlimited Ltd) følsomt fra 0,9 μm til 1,7 μm (som vi kommer til å kalle SWIR kamera) og et InSb kamera fra FLIR som er følsomt fra 1,5 μm til 5 μm (som vi kommer til å kalle MWIR kamera). Begge kameraene har altså relativt brede følsomhetsområder og for å begrense mengden bakgrunnsstråling, særlig på 1 μm , ble båndpassfiltre rundt laserbølglengden benyttet.

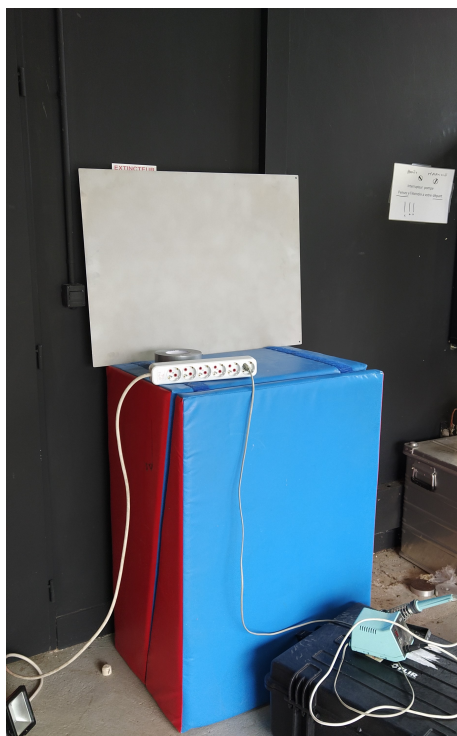


Figur 2.5 Laserhodet på stativ med utsikt nedover banen. På bordet bak laserhodet kan skimtes Compact real time IO enheten som ble benyttet for GPS-synkronisering og trigging av laseren. Foto: ONERA.



Figur 2.6 Bygningen på nordre siden av banen der skjerm og kamera var plassert. Foto: ONERA.

Filteret foran SWIR kamera har 5 nm båndbredde rundt 1064 nm, mens filteret foran MWIR kamera transmitterer fra 1900 nm til 2300 nm. Med teleskopet som ble benyttet begrenser diffraksjonen den fokuserte stråleradien på 1 km til 1 cm og 2 cm for henholdsvis 1 μm og 2 μm bølgelengde.



Figur 2.7 Skjermen laserstrålen ble fokusert på. Foto ved ONERA.



Figur 2.8 Kameraene for avbildning av laserstrålen. Fra venstre til høyre: FFI's 1 μm (SWIR) kamera, FFI's 2 μm (MWIR) kamera, ONERAs 1 μm kamera, Tübitaks single-piksel kamera (som ser direkte inn i laserstrålen), og Tübitaks 2 μm kamera. Foto ved ONERA.

Bildeplanene til kameraene ble plassert 2,7 m (SWIR) og 6,0 m (MWIR) fra skjermen, se figur 2.8. SWIR-kameraet har en linse med 50 mm fokallengde og pikseler med 25 μm avstand. Dette gjør at hvert piksel i bilde representerer et kvadrat med 1,3 mm sidelengde på målskiva. MWIR kameraet

har en 100 mm linse og 15 μm piksler. Dette gir piksler som er 0,87 mm på målskiva.

Lukketiden til kameraene kunne varieres for å oppnå et godt signal-til-støy forhold uten at for mange piksler går i metning. Den brukbare lukketiden var begrenset av laserpulsens lengde på 750 μs . Kameraene gikk med en repetisjonsrate på 100 Hz, synkronisert slik at annethvert av kameraenes integrasjonsvindu overlappet med en laserpuls. Bildene uten laserpuls ble benyttet til å estimere bakgrunn.

Bildstrømmen fra kameraene ble lagret på en laptop. Kameraene var koblet til denne via ethernetforbindelser og kommunikasjonen ble styrt med et Labview program. Innledningsvis var det problemer med tap av bilder i kommunikasjonen. Dette ble bedre da det ble benyttet et nettverkskort til hvert kamera og relativt korte ethernetkabler. Billedstrømmen fra MWIR kameraet ble i praksis tapsfri, mens vi fortsatt mistet noen få bilder fra SWIR kameraet.

2.5 Synkronisering av laser og kamera

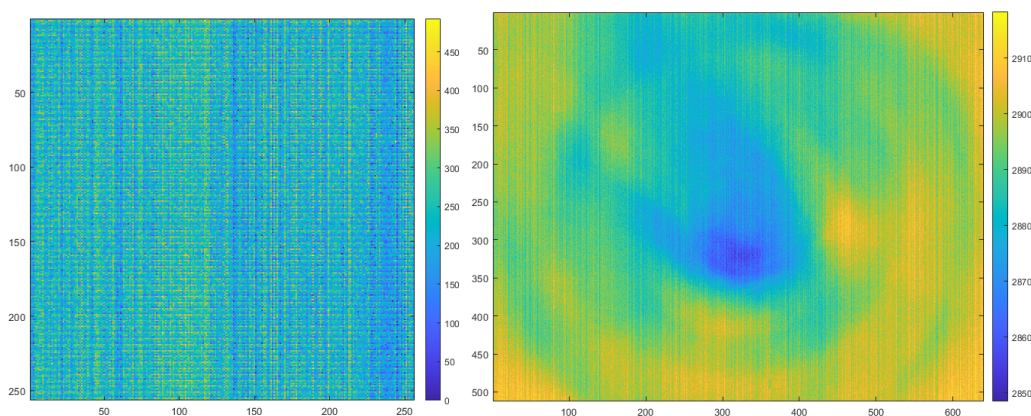
Siden laseren er pulset, med tildels korte pulser i forhold til perioden, så måtte kameralukkeren synkroniseres med laseren. Dette ble gjort ved å synkronisere både laserpulsene og kameraene til puls-per-sekund (PPS) signaler fra GPS-mottakere. Disse mottakerne var koblet til FPGA-kort i National Instrument Compact RIO-enheter. På FPGAene ble det fra PPS-signalet generert pulstog som drev laseren og kameraene. Perioden i pulstogene ble for hvert sekund justert for å kompensere for drift i FPGAens klokke. Det ble også lagret et GPS-tidsstempel hver gang et nytt kameraopptak ble startet.

3 Dataanalyse

Inkludert testkjøringene ved FFI på Kjeller finnes det datafiler fra 86 kjøringene for både SWIR kameraet (som er følsomt for $1,064 \mu\text{m}$ lyset) og MWIR kameraet (som er følsomt for $2,036 \mu\text{m}$ lyset). For SWIR kameraet har vi 4 testkjøringene ved FFI på Kjeller og 82 kjøringene ved ONERAs bane i Le Fauga. For MWIR kameraet har vi tilsvarende 5 og 81 kjøringene. Bortsett fra for testkjøringene er dataene lagret i et bin format som tilsvarer `uint16`, det vil si et 16 bit heltallsformat for kun positive tall. Det ble laget en funksjon `readfile.m`, for å kunne lese filene inn i datastrukturer i MATLAB.

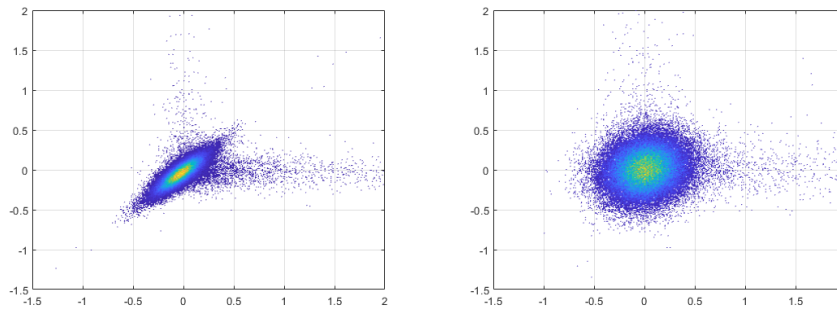
Kjøringene fra Le Fauga blir delt inn i to grupper. De første kjøringene fra Le Fauga var nemlig mislykket fordi synkroniseringen mellom laserpulsene og åpningstidene til kameraene ikke fungerte. Disse kjøringene ignoreres i den videre analysen.

3.1 Bakgrunnsubtraksjon



Figur 3.1 Midlet (over alle enkeltbilder til alle gode kjøringene) bakgrunnsbilde til SWIR (venstre) og MWIR (høyre) kameraet.

Det er kun kjøringene 7–82 som er riktig synkronisert og disse 76 gode kjøringene blir videre analysert (og fra nå av omtalt som kjøringene 1–76). I alle disse kjøringene ble det tatt opp 2 000 enkeltbilder hver, hvorav annenhvert bilde skulle tilsvare et bakgrunnsbilde, det vil si et bilde uten laserstråling. Dette fungerer bare delvis, slik at man må teste hvert eneste bilde om det viser et bilde med eller uten laserstråling. For dette ble det laget en funksjon `analyze_bckgrnd.m`. Algoritmen for å skille mellom bilder med og uten laserstråling er vitterlig enkel og baserer seg på pikselen med den største pikselverdien i et bilde. Hvis denne pikselverdien er over en terskel, så har man et bilde med laserstråling, hvis ikke, så regnes det som et bakgrunnsbilde. Terskelen ligger ved 516 og 3 400 for henholdsvis SWIR og MWIR kameraet. I tillegg til bilder med og uten laserstråling finnes det også helt tomme bilder. Disse består av kun piksler med pikselverdi lik 0 og må ikke brukes som bakgrunnsbilder siden de ikke viser noen reell bakgrunn. Funksjonen `analyze_bckgrnd.m` gir først og fremst en matrise med 4 tall for hvert enkeltbilde. Disse 4 tallene betyr (i) total pikselverdi



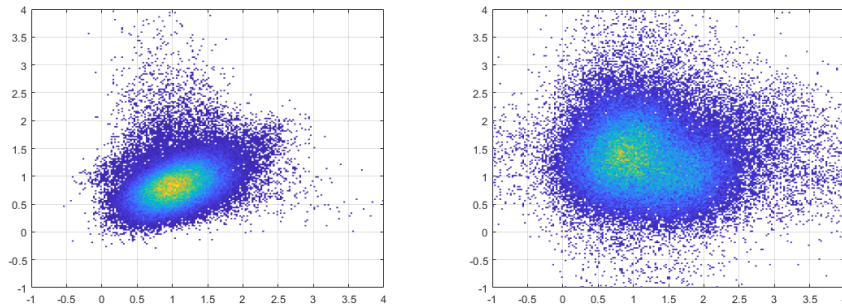
Figur 3.2 SWIR kameraets midlet pikselverdi til høyre kant mot den til venstre kant (venstre panel) og midlet pikselverdi til nedre kant mot den til øvre kant (høyre panel).

til bildet (ii) største enkel-pikselverdi i bildet (iii) 1, 0 eller -1 tilsvarende et bilde med laserstråling, uten laserstråling eller et helt tomt bilde og (iv) antall piksler i metning. Her er det viktig å nevne at SWIR kameraet har en 12 bit ADC, det vil si høyeste mulige pikselverdi til en enkel-piksel er 4 095, mens MWIR kameraet har en 14 bit ADC, som betyr at høyeste mulige pikselverdi er 16 383. Videre blir det generert en vektor med 4 tall for hver kjøring. Disse tallene betyr (i) antall enkeltbilder med laserstråling (ii) antall enkeltbilder uten laserstråling, (iii) antall helt tomme bilder og (iv) antall ganger der den alternerende rekkefølgen av bilder med og uten laserstråling er brutt.

Analysen viser at man finner igjen ganske nøyaktig 1 000 bilder med og uten laserstråling hver i hver kjøring, bortsett fra 7 kjøringene, der synkroniseringen fortsatt feilet i det første sekundet for begge kameraene. For disse kjøringene finner man altså 100 bakgrunnsbilder og ikke noe strålebilder det første sekundet mens for de resterende 19 sekundene, så er antallene bakgrunns- og strålebilder ganske like. Bortsett fra dette finner man at den alternerende rekken mellom bakgrunns- og strålebilder er brutt i gjennomsnitt 10–20 ganger for hver kjøring med SWIR kameraet, mens for MWIR kameraet så skjer det så å si aldri.

Funksjonen, `gen_sublist.m`, genererer en liste med bakgrunns- og strålebilder som brukes til å lage bakgrunnssubtraherte strålebilder. Funksjonen finner par av umiddelbart etterfølgende bilder der et av bildene er et strålebilde og det andre er et bakgrunnsbilde. Hvert bilde kan brukes kun én gang. Resultatet er en liste med to rader der den øvre raden er nummeret til et strålebilde og nedre raden er nummeret til et bakgrunnsbilde og hver kolonne danner et par med etterfølgende bilder. Funksjon, `gen_subtrc.m`, tar denne listen og genererer bakgrunnssubtraherte strålebilder fra datakuben med alle 2 000 enkeltbildene i kjøringen, listen fra funksjonen `gen_sublist.m` som forteller hvilke bilder som skal trekkes fra hverandre og listen med antall saturerte piksler i alle enkeltbilder. Resultatet er en mindre kube med alle bakgrunnssubtraherte enkeltbilder, et gjennomsnittlig bakgrunnsbilde for hele kjøringen og det totale antallet med saturerte piksler som inngår i de bakgrunnssubtraherte enkeltbildene. Analysen viser at antallet bakgrunnssubtraherte bilder ligger mellom 990 og 1 000 for de fleste kjøringene bortsett fra de 7 kjøringene der synkroniseringen i det første sekundet feilet. For disse kjøringene ligger antallet bakgrunnssubtraherte bilder mellom 940 og 950. Videre finner vi 5 946 saturerte piksler i alle enkeltbildene til SWIR kameraet, som tilsvarer en andel av $1,2 \cdot 10^{-6}$ av alle piksler i disse bildene og 2 312 saturerte piksler i alle enkeltbildene til MWIR kameraet, som tilsvarer en andel av $9,3 \cdot 10^{-8}$ av alle piksler i disse bildene. Til slutt har vi laget et gjennomsnittlig bakgrunnsbilde over alle kjøringene for både SWIR og MWIR kameraet

(se figur 3.1). Flere observasjoner rundt bakgrunnsbilder er gitt i vedlegg A.



Figur 3.3 MWIR kameraets midlet pikselverdi til høyre kant mot den til venstre kant (venstre panel) og midlet pikselverdi til nedre kant mot den til øvre kant (høyre panel).

3.2 Bildeutsnitt

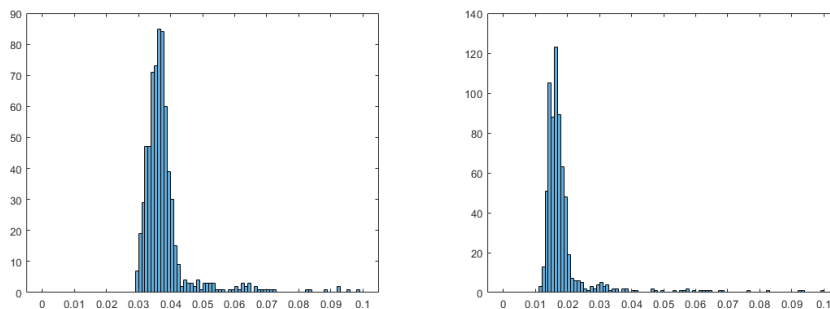
3.2.1 Innledende observasjoner

Til tross for at man har generert bakgrunnssubtraherte strålebilder viser det seg at bakgrunnsnivået og dets fluktuasjoner ikke er lavt nok for å kunne estimere laserstrålens midtpunkt og bredde med tilstrekkelig presisjon. Det er derfor ønskelig for hver kjøring å finne et utsnitt av strålebildene som laserstrålen befinner seg i, mens man kan bruke alt utenfor utsnittet til å estimere det resterende bakgrunnsnivået. I første omgang ble det valgt å sjekke en kant tilsvarende de ytterste 10 linjene med piksler rundt bildene. Selv om denne metoden ikke produserer tilfredstillende resultater, er det allikevel nyttig for den videre forståelsen å presentere noen resultater derfra.

Den mest interessante observasjonen gjør vi når vi estimerer bakgrunnsnivået ved å finne midlet pikselverdi for hver av de 4 kantene i hvert enkeltbilde for alle kjøringene. Her viser det seg nemlig at spesielt for SWIR kameraet (se figur 3.2), så er bakgrunnsnivået til venstre kant velkorrelert med bakgrunnsnivået til høyre kant (panelet til venstre), mens bakgrunnsnivåene til øvre og nedre kant ikke er nevneverdig korrelerte med hverandre (panelet til høyre).

Observasjonen forklares ved at man antar at støynivået langs en horisontal linje i bildene til SWIR kameraet er korrelert med hverandre (altså at det finnes i tillegg til individuell pikselstøy også en felles horisontal linjestøy). Det forklarer også hvorfor klatten i høyre panel til figur 3.2 er mye bredere enn den i venstre panel. De punktene i grafen som ligger over eller til høyre for klattene tilsvarer enkeltbilder der laserstrålen faktisk treffer kanten til bildet. Ellers ser man at klattene er velsentrert rundt null, som betyr at bakgrunnssubtraksjonen virker ganske vellykket.

Situasjonen for MWIR kameraet er litt annerledes. Korrelasjonen i støynivå mellom venstre og høyre kant er en del mindre enn for SWIR kameraet (sammenlign venstre paneler til figurene 3.2 og 3.3). På den andre siden er klattene ikke sentrert rundt null lenger, som betyr at ikke alt av bakgrunn ble trukket fra. Grunnen for det kan være spredt lys fra laserstrålen som bidrar til bakgrunnen.



Figur 3.4 SWIR kameraets varianser til midlet pikselverdi for horisontale striper (venstre panel) og vertikale striper (høyre panel).

En annen forklaring kunne vært at høye pikselverdier som opptrer på grunn av detektert laserlys overhøres av alle de andre piksler, inkludert disse som ikke blir truffet av laserlys. Dermed får *alle* piksler en litt forhøyet verdi, så lenge *noen* av pikslene er truffet av laserlys. Det er usikkert hvilken forklaring er mest treffende, men uansett er det en viktig observasjon at bakgrunnsnivået ikke ligger rundt null, som det skulle.¹

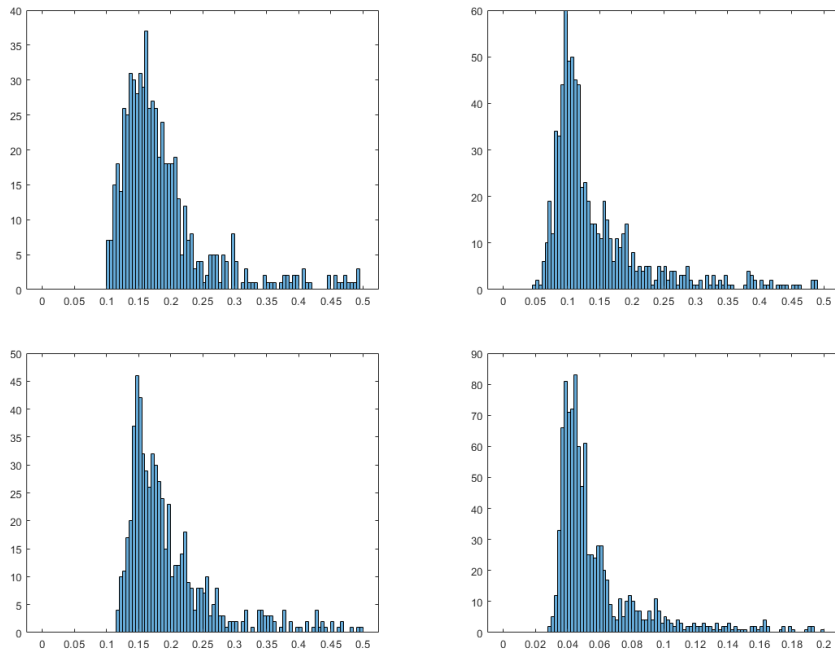
3.2.2 Algoritme

For å finne et bildeutsnitt der strålen befinner seg innenfor for alle bilder til en kjøring har vi valgt følgende algoritme. Hvert bilde blir delt i vannrette og loddrette striper som er 16 piksler brede. Midlet pikselverdi til alle disse stripene for hvert bilde i en kjøring blir så beregnet. For hver stripe blir det så beregnet variansen til midlet pikselverdi over en hel kjøring. Variansen er en veldig følsom indikator for tilfeller der strålen treffer stripen i kun noen få bilder under en kjøring.² Hvis denne variansen til en stripe ligger over en gitt terskel, så ble stripen truffet av laserstrålen under kjøringen, hvis ikke, så ikke. For SWIR kameraet er terskelen for horisontale striper lik 0,055 og for vertikale striper lik 0,035 (se figur 3.4). Forskjellen skyldes selvfølgelig observasjonen fra kapittel 3.2.1 at støyen i en horisontal linje er korrelert og variansen blir derfor større. For MWIR kameraet, siden bakgrunnsnivået varierer litt langs bildet, så har vi forskjellige terskelverdier på hver side av bildet. For de horisontale stripene har vi tersklene 0,26 for de øvre stripene og 0,27 for de nedre stripene, mens for de vertikale stripene har vi 0,23 for de venstre stripene og 0,11 for de høyre stripene (se figur 3.5).

Algoritmen er implementert i funksjonen `analyze_edge.m` som bruker datakuben med bakgrunns-subtraherte strålebilder fra funksjonen `gen_subtrc.m`. Resultatet er en vektor med logiske verdier som karakteriserer bakgrunns-subtraksjonen til hvert enkeltbilde i en kjøring som vellykket (`true`)

¹Dette gjelder til og med testkjøringene i kjelleren på kort avstand.

²Variansen er også veldig følsom for enkeltbilder der bakgrunnen er trukket fra feil, som skjer for eksempel i forbindelse med manglende synkronisering det første sekundet eller med uforklarlige hopp i bakgrunnsnivået (se diskusjonen i vedlegg A). For å utelukke slike enkeltbilder blir det karakterisert fordelingen til total pikselverdi til enkeltbildene for hver kjøring. Enkeltbilder der total pikselverdi er mer enn 4σ vekk fra middelveidien blir utelukket fra all videre dataanalyse. For de fleste kjøringene utelukkes ingen, eller kun ett bilde som følge av det, ingen kjøring har mer enn fem slike tilfeller.

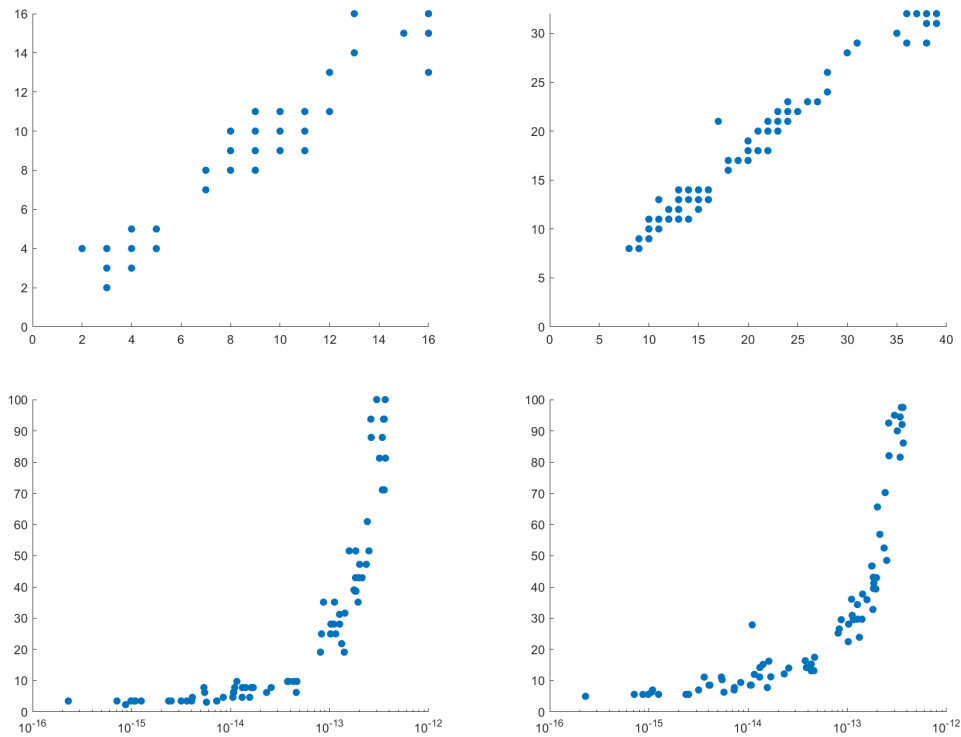


Figur 3.5 MWIR kameraets varianser til midlet pikselverdi for horisontale striper (venstre paneler) der variansen til øvre halvparten av striper er i øvre panel og variansen til nedre halvparten av striper er i nedre panel. Variansen til vertikale striper (høyre paneler) viser variansen til venstre halvparten av striper i øvre panel og variansen til høyre halvparten av striper i nedre panel.

eller ikke (false) i henhold til fotnote 2. Videre gir den en vektor med lengde 5 for hver kjøring som gir den ytterste (i den rekkefølgen) venstre, høyre, øvre og nedre 16 piksler brede stripen, som fortsatt inneholder en del av laserstrålen i noen av enkeltbildene. Det femte tallet er bredden til en stripe i piksler, som i vår analyse er satt til 16.

Resultatet av denne algoritmen er at vi finner et utsnitt for hver kjøring der både bredden og høyden korrelerer veldig godt i størrelse med hverandre og med det optiske turbulensnivået gitt ved C_n^2 som ble målt med ONERAs scintillometer (se figur 3.6). For å kunne korrelere ONERAs scintillometer i tid med FFIs målinger ble det utført en synkronisering av klokken i begynnelsen av eksperimentet. Her viste det seg at klokken til ONERAs scintillometer var sen med 4 sekunder mens klokken til FFIs laptop var sen med 7 sekunder (i forhold til en felles standard). Det betyr at klokken til FFIs laptop var sen med 3 sekunder i forhold til klokken til ONERAs scintillometer. Videre er det viktig at ONERAs scintillometer målte C_n^2 midlet over 60 sekunder, mens våre kjøringene varte i omtrent 20 sekunder. Siden ONERAs målinger alltid begynte ved hele minuttet og klokken til FFIs laptop var sen med 3 sekunder og siden vi ønsker mest mulig overlapp i tid mellom målingene, så bruker vi i sammenlikningen C_n^2 verdien fra samme minutt hvis FFIs måling begynte før eller i 47. sekund og C_n^2 verdien fra neste minutt hvis FFIs måling begynte etter 47. sekund.

Størrelsen til bildeutsnittet kan antas å gi et omtrentlig mål for strålestørrelsen midlet over tid og det er fint å se at selv en så rudimentær analyse av resultatene som er gjort her gir en sammenheng



Figur 3.6 Øvre paneler viser høyde mot bredde til det nødvendige bildeutsnittet (i antall 16 piksler brede striper) for å fange opp laserstrålen i alle enkeltbilder til en kjøring for SWIR (venstre) og MWIR (høyre) kameraet. Nedre paneler viser arealprosenten til utsnittet av hele bildet mot C_n^2 verdien (i $m^{-2/3}$) som er målt av ONERAs scintillometer for SWIR (venstre) og MWIR (høyre) kameraet.

mellom strålestørrelse og turbulens som er kvalitativt veldig likt det man forventer å se. Oppmuntret ved dette resultatet fortsetter vi nå analysen ved å ekstrahere momenter til intensitetsfordelingen og deres tidsrekker for hver kjøring.

3.3 Midlet bilde

Vi begynner med å karakterisere strålebildene som er midlet over en kjøring, det vil si over 20 sekunder. Midlet bilde er mye mindre preget av tilfeldige fluktasjoner til turbulensen, det vil si resultatene blir lettere å tolke og det er enklere å anvende statistiske metoder og modeller.

3.3.1 Innledende betraktninger

Før vi begynner å presentere noen resultater skal vi utlede noen teoretiske uttrykk som vi kan sammenlikne målingene med. Hvis man for eksempel tar utgangspunkt i en gaussisk stråleprofil i

moment	vinkelfordeling (uniform)	radiell fordeling (Rayleigh)
første	0	$\sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}} = \langle r \rangle$
andre	$\frac{\pi^2}{3} = \langle \phi^2 \rangle$	$2\sigma^2 = \frac{4}{\pi} \langle r \rangle^2$
tredje	0	$3\sigma^2 \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}} = \frac{6}{\pi} \langle r \rangle^3$
fjerde	$\frac{\pi^4}{5} = \frac{9}{5} \langle \phi^2 \rangle^2$	$8\sigma^4 = \frac{32}{\pi^2} \langle r \rangle^4$

Tabell 3.1 De fire første momentene til den uniforme vinkelfordelingen og den radielle Rayleighfordelingen.

både x og y retningen der breddene i begge retninger er like (og strålemaksimum ligger i origo), så kan man beskrive profilen ved

$$I(x, y) dx dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy.$$

Denne fordelingen kan lett transformeres til planare polarkoordinater ved

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi, \\ y &= r \sin \phi. \end{aligned}$$

Siden vi finner $dx dy = r dr d\phi$, kan vi uttrykke intensitetsfordelingen i planare polarkoordinater ved

$$I(r, \phi) dr d\phi = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr d\phi.$$

Fordelingen kan separeres i en (uniform, normert) vinkelfordeling

$$w(\phi) d\phi = \frac{1}{2\pi} d\phi$$

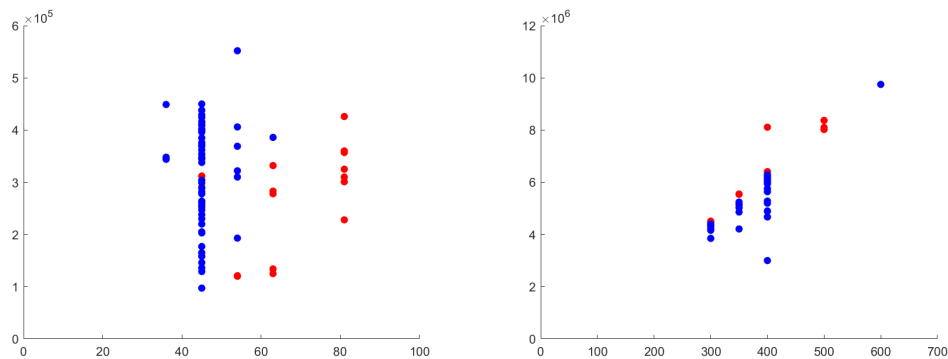
og en radiell (også normert) fordeling

$$I(r) dr = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr,$$

som er kjent som Rayleighfordelingen.

For begge fordelingene kan vi beregne momentene relativ til nullpunktet som for vinkelfordelingen tilsvarer x akse og for den radielle fordelingen tilsvarer origo. For vinkelfordelingen får vi simpelthen

$$\langle \phi^n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi^n d\phi = \frac{1}{2\pi} \frac{\phi^{n+1}}{n+1} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \begin{cases} \frac{\pi^n}{n+1} & n = \text{partall} \\ 0 & n = \text{oddetall}, \end{cases}$$



Figur 3.7 Total pikselverdi til midlet strålebilde (vertikal akse) mot eksponeringstid i μs (horisontal akse) for SWIR kameraet (venstre) og MWIR kameraet (høyre). Data-punktene i rødt indikerer tilfeller der strålen muligens er større enn bildet, se diskusjonen i kapittel 3.3.

mens for Rayleighfordelingen får vi

$$\langle r^n \rangle = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty r^{n+1} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr.$$

Ved hjelp av substitusjonen $t = \frac{r^2}{2\sigma^2}$, det vil si $r = \sqrt{2t\sigma^2}$ og $dt = \frac{r}{\sigma^2} dr$ kan vi omforme integralet til

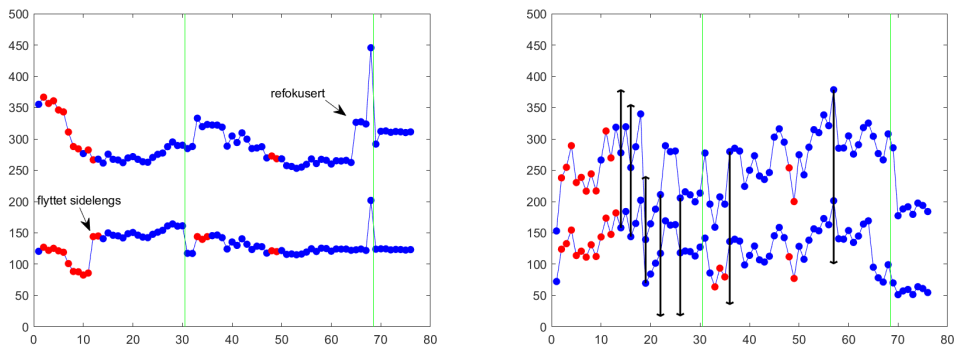
$$\int_0^\infty (2t\sigma^2)^{n/2} e^{-t} dt = (2\sigma^2)^{n/2} \int_0^\infty t^{n/2} e^{-t} dt = (2\sigma^2)^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right),$$

der integralet evalueres ved gammafunksjonen. Siden vi kommer til å presentere sammenlikninger opptil fjerde moment, skal vi resumere de teoretiske resultatene i tabell 3.1.

3.3.2 Algoritme

For å beregne momenter til intensitetsfordelingen må man ha god kontroll på bakgrunnen. For å estimere bakgrunnen til et bilde bruker vi den delen av bildet som *ikke* blir truffet av strålen jamført algoritmen fra kapittel 3.2.2. Vi estimerer midlet pikselverdi til den delen av bildet og antar at denne verdien gir et estimat for bakgrunnsnivået for hele bildet. Så trekker vi fra denne pikselverdien fra alle piksler til den andre delen av bildet, altså den som *blir* truffet av strålen. Dette er nødvendig, siden den egentlige bakgrunnsborttrekking gir utilfredsstillende resultater, spesielt for MWIR kameraet. Dette har vi beskrevet i detalj i kapittel 3.2.1. Størrelsesorden til denne andre bakgrunnsborttrekkingen blir diskutert lenger ned i dette kapitlet. Forøvrig, hvis vi ikke finner minst en bakgrunnsstripe på hver av de fire sidene til et bilde, så kan vi ikke være sikker på at hele strålen faller innenfor bildet. I slike tilfeller hever algoritmen et flagg og i grafene markerer vi dette ved å bruke rødfarge.

Det neste som blir beregnet er total pikselverdi til det utsnittet av bildet som blir truffet av strålen. Vi kommer til å kalle denne verdien for stråleintensitet. Videre beregnes midtpunktet til strålen i både



Figur 3.8 Midlet x (venstre) og y (høyre) pikselposisjon til strålen for SWIR (nedre linjer) og MWIR (øvre linjer) kameraene for kjøringene. Kjøringene der strålen muligens er større enn bildet er gjengitt med røde datapunkter. For SWIR kameraet ligger midtpunktet til bildet ved $(x;y)=(128;128)$, mens for MWIR kameraet er midtpunktet $(320;256)$. Før kjøring 12 ble $1\ \mu\text{m}$ laseren forskjøvet sidelengs (logboken forteller ingenting om høyre eller venstre), og begge stråler ble refokuseret før kjøring 65. Strålene ble også gjentatte ganger flyttet opp og ned for å kompensere for en sakte vandring gjennom dagen (se tekst). Alle slike tilfeller er markert ved svarte piler. Grønne linjer viser skillene mellom dagene.

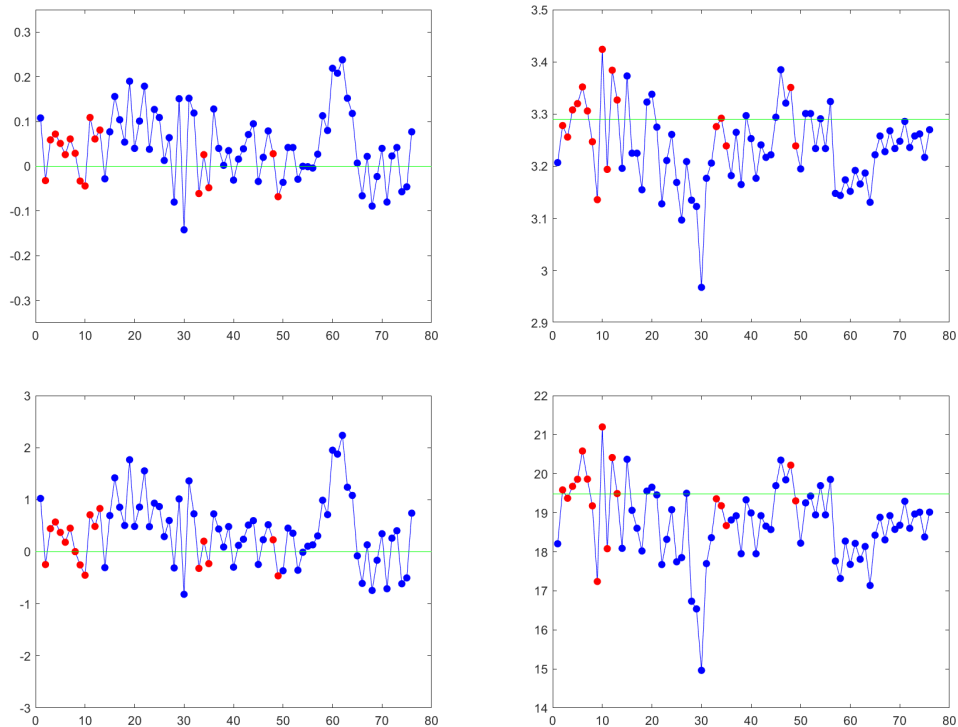
x og y retningen (ved å beregne første moment). Pikselposisjonene blir så transformert til planare polarkoordinater med origo i midtpunktet til strålen. Her er startpunkt for vinkelen positiv x retning, men med økende vinkel *med klokka*, siden positiv y retning (i pikselposisjon) peker nedover (se figur 3.1). Basert på vinkel og radius til pikselposisjonene beregnes nå første til fjerde moment for både vinkel- og radiell fordeling.

Hele algoritmen er implementert i funksjonen `analyze_ave.m` som bruker kubene med bakgrunns-subtraherte data og resultatene til funksjonen `analyze_edge.m`, det vil si informasjon om hvor i bildet strålen og bakgrunnen befinner seg. Resultatet er en vektor med 13 tall for hver kjøring som gir (i) flagget om hele strålen ble fanget eller ikke (ii) bakgrunnsnivået (før andre bakgrunns-subtraksjon), (iii) total pikselverdi til strålen, (iv-v) x og y posisjon til strålemidtpunktet og (vi-xiii) de første fire momentene til radiell og til vinkelfordelingen.

3.3.2.1 Bakgrunnsnivå og stråleintensitet

Det første interessante tallet er hvor god den opprinnelige bakgrunns-subtraksjonen virker. Vi har derfor beregnet midlet (over alle kjøringene) resterende bakgrunnsnivå før den andre bakgrunns-subtraksjonen og dets standardavvik. For SWIR kameraet får vi $-0,03 \pm 0,02$, det vil si en verdi som er litt negativ, men fortsatt forenelig med null. For MWIR kameraet får vi derimot $1,5 \pm 0,4$, det vil si en verdi som ligger nesten 4σ over null. Dette tilsvarer vår tidligere observasjon om bakgrunns-subtraksjonen fra kapittel 3.2.1. Vi ser altså at spesielt i tilfelle MWIR kameraet, så er den andre bakgrunns-subtraksjonen helt nødvendig.

Videre er det interessant å korrelere stråleintensiteten (gitt ved den totale pikselverdien til et



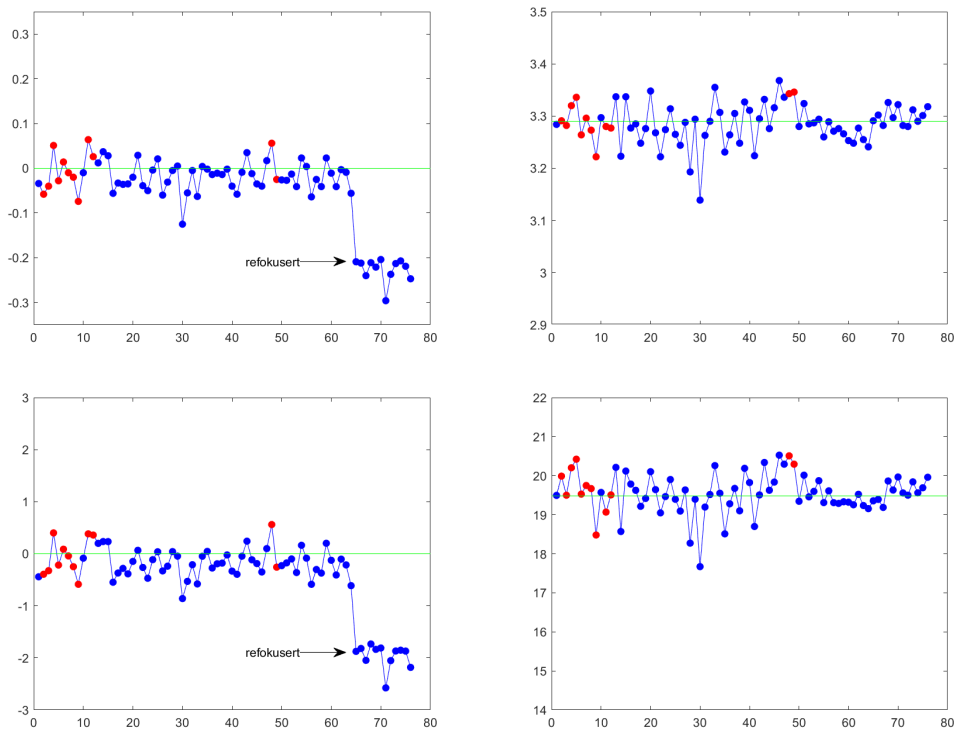
Figur 3.9 Fra øverst til venstre til nederst til høyre: første til fjerde momenter til vinkelfordelingen (i radianer) for kjøringene med $1 \mu\text{m}$ laserstrålen. De grønne linjene tilsvarer momenter til en uniform vinkelfordeling (se tabell 3.1). Datapunkter i rødt indikerer tilfeller der strålen muligens er større en bildet.

strålebilde) med eksponeringstid. Vi varierte eksponeringstiden gjennom eksperimentet for å unngå overeksponering ved ugunstige lysforhold. Mens for MWIR kameraet finner vi en veldig god korrelasjon mellom eksponeringstid og stråleintensitet,³ så ser vi så å si ikke noe korrelasjon mellom de to i tilfelle SWIR kamera. Hvorfor dette skulle være slikt er egentlig ganske uklart.

3.3.2.2 Stråleposisjon

Neste interessante punkt er stråleposisjonen. Her er det mange observasjoner. For det første ser man at både x og y posisjonene til de to laserstrålene korrelerer veldig godt med hverandre med noen få unntak. $1 \mu\text{m}$ laserstrålen ble flyttet litt til side i løpet av den første dagen som man ser veldig bra i forløpet til x posisjonen (som tilsvarer den horisontale akse i strålebildene). Videre, så skjedde en relativ forflytning i x retningen mellom de to laserstrålene i forbindelse med skillet mellom første og andre dag. Mot slutten av andre dag ble begge laserstråler refokuserert som også resulterte i en relativ forflytning mellom laserstrålene i x retningen.

³Vi finner videre at resterende bakgrunnsnivået til MWIR kameraet korrelerer svakt med eksponeringstid og dermed også med stråleintensiteten, mens det er antikorrelert med turbulensnivået.



Figur 3.10 Fra øverst til venstre til nederst til høyre: første til fjerde momenter til vinkelfordelingen (i radianer) for kjøringene med $2\ \mu\text{m}$ laserstrålen. De grønne linjene tilsvarer momenter til en uniform vinkelfordeling (se tabell 3.1). Datapunkter i rødt indikerer tilfeller der strålen muligens er større en bildet.

Når det gjelder y posisjonen, så ble laserstrålene flyttet opp og ned gjentatte ganger i løpet av målingene for å kompensere for en sakte vandring gjennom dagen. Som beskrevet i FFI rapport 2013/01086 kan høyden til en stråle beskrives ved

$$Cn(y) = \sqrt{1 + y'^2}$$

der $n(y)$ er brytningsindeks som avhenger kun av den vertikale koordinaten og C er en integrasjonskonstant som bestemmes ved randbetingelsen. Hvis vi antar at forandringen til brytningsindeksen med høyden er hovedsakelig linear, det vil si vi antar at $n(y) = n_0(1 + n_y y)$, der n_y er en konstant gradient, og hvis vi videre antar at utgangspunkt er en horisontal laserstråle (det vil si ved $z = 0$ har vi $y = 0$ og $y' = 0$), så finner vi først og fremst at $C = n_0^{-1}$ og at differensiallikningen forenkles til

$$1 + n_y y = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Denne differensiallikningen løses ved

$$y = \frac{1}{n_y} (\cosh(n_y z) - 1),$$

som også oppfyller randbetingelsene. Vi fant i del II av rapportserien at gradienten til brytningsindeksen er gjerne i størrelsesorden 10^{-8} m^{-1} , som betyr at vi kan tilnærme løsningen for små argumenter $n_y z$ og får

$$y \approx \frac{1}{2} n_y z^2.$$

For avstander tilsvarende 1 km får vi $z^2 = 10^6 \text{ m}^2$, som betyr at en gradient i størrelsesorden 10^{-8} m^{-1} (som tilsvarer en temperaturgradient rundt 0,01 K/m) gir en vertikal forflytning av strålen tilsvarende 0,5 cm. Ved sterk solinnstråling kan temperaturgradienten og dermed gradienten til brytningsindeksen øke typisk med en faktor 100, som betyr at den vertikale forflytningen til laserstrålen kan bli så stor som 50 cm. Det er nettopp denne effekten som kompenseres for når laserstrålen ble flyttet opp og ned i løpet av dagen. Det er ikke dokumentert hvor mye laserstrålen ble flyttet opp og ned de forskjellige gangene, men en forflytning av 0,5 cm på målet som er 1 km langt vekk, tilsvarer selvfølgelig en vinkling med $5 \mu\text{rad}$, mens en forflytning på 50 cm tilsvarer en vinkling med 0,5 mrad. En mer detaljert regning finnes i vedlegg B.

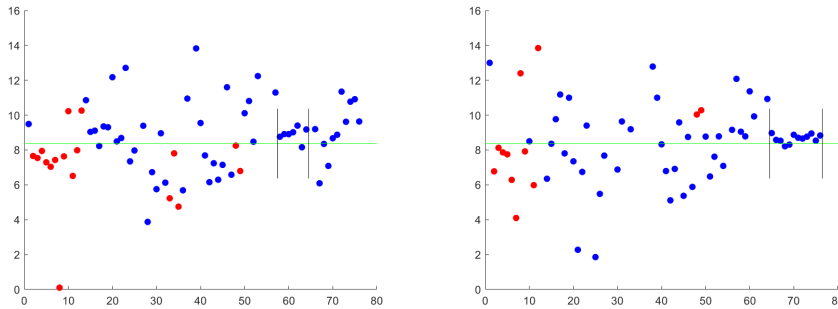
moment	vinkelfordeling modifisert
første	$-\frac{\alpha \sin(2\phi_0)}{2}$
andre	$\frac{\pi^2}{3} + \frac{\alpha \cos(2\phi_0)}{2}$
tredje	$-\frac{\alpha \sin(2\phi_0)}{2} \left(\pi^2 - \frac{3}{2} \right)$
fjerde	$\frac{\pi^4}{5} + \frac{\alpha \cos(2\phi_0)}{2} (2\pi^2 - 3)$

Tabell 3.2 De fire første momentene til den modifiserte vinkelfordelingen.

3.3.2.3 Vinkelfordeling

Etter alle disse diskusjonene kommer vi nå til å se på momentene til vinkelfordelingen. Figurene 3.9 og 3.10 viser første til fjerde moment til vinkelfordelingen for alle kjøringene for henholdsvis $1 \mu\text{m}$ og $2 \mu\text{m}$ strålen. Momentene følger verdiene til en uniform fordeling veldig bra med et lite unntak. Kjøringene 60–64 viser at de oddetallsmomentene til $1 \mu\text{m}$ laserstrålen går en del i retning positive tall (selv om avviket fra nullinjen ikke blir så mye større enn det har vært før og det generelt sett ser ut til å avta av seg selv). Denne observasjonen førte nok til en beslutning om å refokusere laserstrålene. Hva som akkurat ble gjort i detalj sier logboken ingenting om, men resultatet ble altså at de avvikende momentene til vinkelfordelingen til $1 \mu\text{m}$ laserstrålen går tilbake til normalen, mens de oddetallsmomentene til vinkelfordelingen til $2 \mu\text{m}$ laserstrålen nå begynner å avvike signifikant fra nullinjen i negativ retning fra kjøring 65 og utover. Dette avviket er faktisk større enn det tidligere observerte avviket i positiv retning for $1 \mu\text{m}$ laserstrålen. Dermed kan man konkludere at refokuseringsøvelsen i felt ble mislykket.

For å kunne analysere avvik av momentene fra momentene til en uniform vinkelfordeling, skal vi diskutere en generalisering av vinkelfordelingen. En enkel, fenomenologisk modifikasjon inkluderer



Figur 3.11 Forholdet mellom tredje og første moment til vinkelfordeling (i radianer) for kjøringene med SWIR (venstre) og MWIR (høyre) kameraet. De horisontale grønne linjene tilsvarer $\pi^2 - \frac{3}{2}$ som er forventningen basert på den modifiserte vinkelfordelingen. De vertikale svarte linjene avgrensner kjøringene der man observerer ikke-sirkulære strålebilder og oddetallsmomenter som er sterkt avvikende fra null før (venstre) og etter (høyre) refokuseringen.

et trigonometrisk ledd med periode $\frac{2\pi}{n}$ og $n \geq 2$ (et trigonometrisk ledd med periode 2π hadde forskjøvet midtpunktet til den todimensjonale intensitetsfordelingen – derfor ser vi bort fra en slik modifikasjon). Her er det viktig å huske at man introduserer (for hver n) ikke kun en parameter for amplituden til det nye leddet, men også en parameter for fasen (relativ til $\phi = 0$ som tilsvarer x akse). For å diskutere den enkleste modifikasjonen skal vi derfor se på modifikasjonen

$$\frac{1}{2\pi} d\phi \rightarrow \frac{1}{2\pi} \{1 + \alpha \cos[2(\phi - \phi_0)]\} d\phi,$$

der vi kan begrense de mulige verdiene til parameterne til $0 \leq \alpha$ og $0 \leq \phi_0 < \pi$.

Vi skal beregne momentene til denne fordelingen på vanlig måte og får

$$\langle \phi^n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \phi^n \frac{1}{2\pi} \{1 + \alpha [\cos(2\phi_0) \cos(2\phi) + \sin(2\phi_0) \sin(2\phi)]\} d\phi.$$

Symmetrien tillater oss å betrakte liketalls- og oddetallsmomenter separate fra hverandre. Spesielt får vi

$$\langle \phi^n \rangle = \begin{cases} \frac{\pi^n}{n+1} + \frac{\alpha \cos(2\phi_0)}{\pi} \int_0^\pi \phi^n \cos(2\phi) d\phi & n = \text{liketall} \\ \frac{\alpha \sin(2\phi_0)}{\pi} \int_0^\pi \phi^n \sin(2\phi) d\phi & n = \text{oddetall}. \end{cases}$$

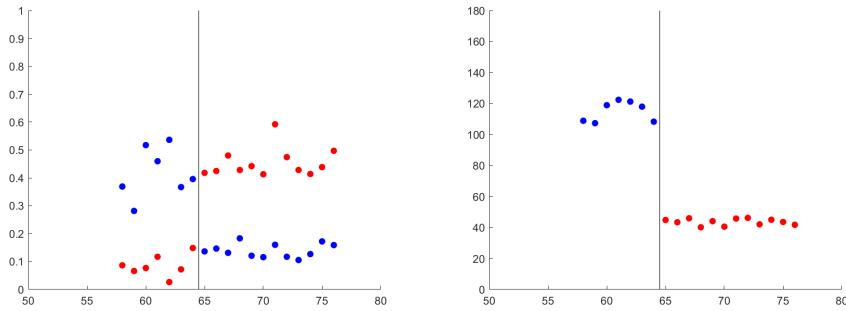
Integralene evalueres til

$$\langle \phi^n \rangle = \begin{cases} \frac{\pi^n}{n+1} + \frac{\alpha \cos(2\phi_0)}{\pi} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^k \frac{n!}{(n-2k-1)!} \frac{\pi^{n-2k-1}}{2^{2k+2}} & n = \text{liketall} \\ \frac{\alpha \sin(2\phi_0)}{\pi} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{k+1} \frac{n!}{(n-2k)!} \frac{\pi^{n-2k}}{2^{2k+1}} & n = \text{oddetall}. \end{cases}$$

De første fire momentene er gjengitt i tabell 3.2.

Det som er relevant for oss er at den modifiserte vinkelfordelingen gir ikke-forsvinnende verdier for det første og tredje momentet. Enda mer interessant er at første og tredje moment er relatert ved

$$\langle \phi^3 \rangle = \left(\pi^2 - \frac{3}{2} \right) \langle \phi \rangle,$$



Figur 3.12 Amplituden α (venstre) og fasen ϕ_0 (høyre, i grader) til den modifiserte vinkelfordelingen for kjøringene med $1 \mu\text{m}$ (blå symboler) og $2 \mu\text{m}$ (røde symboler) laserstrålen. De vertikale svarte linjene skiller de 7 kjøringene (58–64) før fra de 12 kjøringene (65–76) etter refokuseringen.

som ikke inneholder noen parameter og som derfor er en veldig robust relasjon.⁴ Vi skal se om dataene lar seg beskrive ved den enkle modifikasjonen av vinkelfordelingen ved å se om *forholdet* mellom tredje og første moment tilsvarer forventningen. I figur 3.11 ser man at dataene fra akkurat de kjøringene der man ser sterke avvik av oddetallsmomentene fra null (avgrenset av de vertikale svarte linjene), lar seg fint beskrive av den modifiserte vinkelfordelingen.

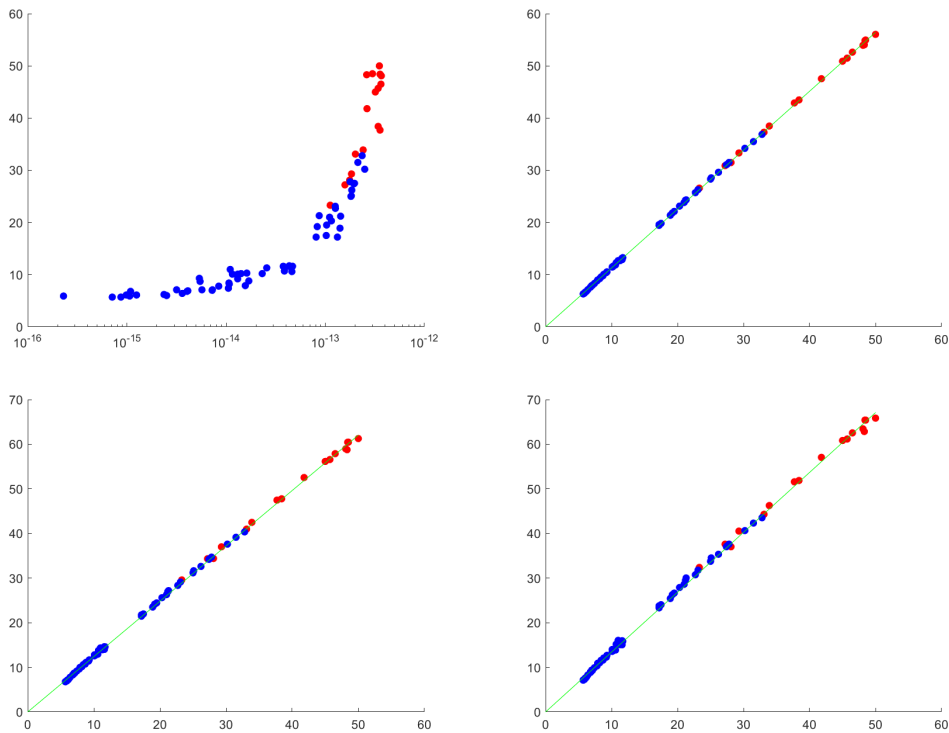
Oppmuntret av dette resultatet fortsetter vi diskusjonen ved å prøve å ekstrahere både amplituden α og fasen ϕ_0 til den modifiserte vinkelfordelingen. For å finne amplituden og fasen ut av momentene kan vi danne størrelsene

$$\alpha = 2\sqrt{\langle\phi\rangle^2 + \left(\langle\phi^2\rangle - \frac{\pi^2}{3}\right)^2}$$

$$\phi_0 = \frac{1}{2} \arctan \left[-\frac{\langle\phi\rangle}{\langle\phi^2\rangle - \frac{\pi^2}{3}} \right].$$

Amplituden vises for begge laserstråler og alle kjøring fra 58–76 i venstre panel til figur 3.12, mens fasen vises kun for de tilfellene som er avgrenset i figur 3.11, det vil si der vi kan være sikre på at den modifiserte vinkelfordelingen beskriver dataene bra. Amplitudene og fasene kan tolkes dithen at *før* refokuseringen så viste $1 \mu\text{m}$ laserstrålen (blå symboler) en tydelig modifisert vinkelfordeling med et maksimum ved rundt 120 grader. Denne vinkelfordelingen ble nokså uniform etter refokuseringen. $2 \mu\text{m}$ laserstrålen (røde symboler) derimot viser en tydelig modifisert vinkelfordeling *etter* refokuseringen med et maksimum ved rundt 40 grader, det vil si omtrent 80 grader forskjøvet i forhold til maksimum til $1 \mu\text{m}$ laserstrålen *før* refokuseringen. Det betyr vel at anisotropien til den ene laserstrålen blir rettet ved å samtidig introdusere en mer eller mindre like stor, vinkelrett anisotropi i den andre laserstrålen.

⁴En liknende relasjon kan utledes mellom *avvikene* til andre og fjerde moment fra de tilsvarende momentene til en uniform vinkelfordeling. Men siden avvikene er små og dataene er støyende egner seg denne relasjonen i kun mindre grad for å etterprøve om den modifiserte vinkelfordelingen beskriver dataene.



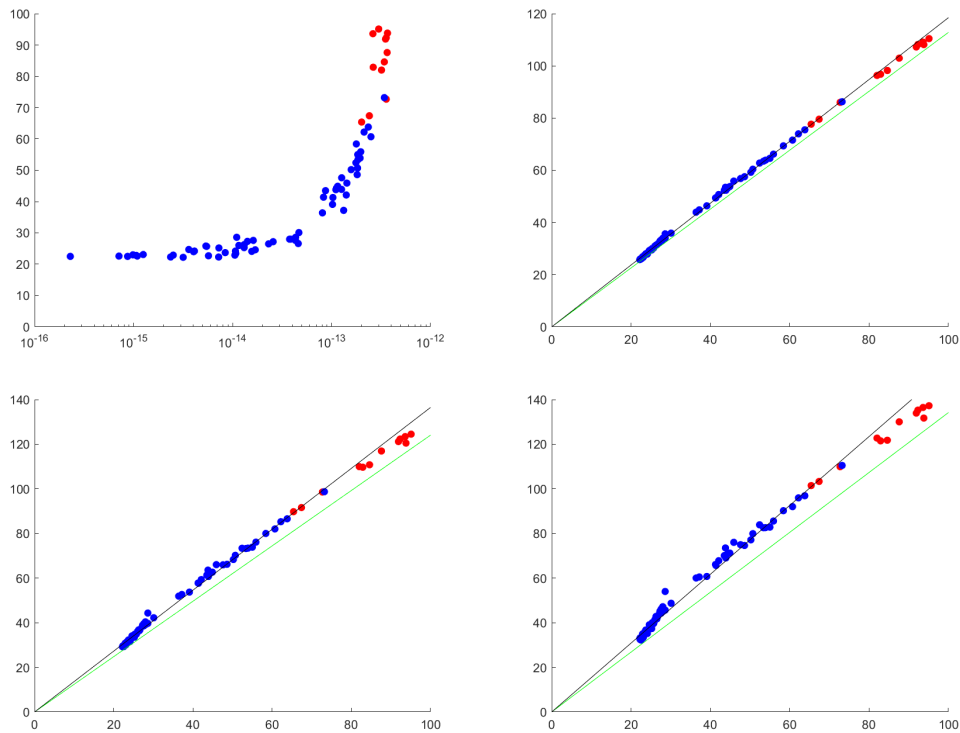
Figur 3.13 Øverst til venstre: første moment til radiell fordeling (i piksler) til $1 \mu\text{m}$ laserstrålen som funksjon av turbulensnivået gitt ved C_n^2 i $\text{m}^{-2/3}$. Videre tre paneler: $\sqrt[n]{\langle r^n \rangle}$ for $n = 2 \dots 4$ som funksjon av første moment (alt i piksler). De grønne linjene indikerer forløpet for en Rayleighfordeling (se tabell 3.1). Datapunkter i rødt indikerer tilfeller der strålen muligens er større en bildet.

3.3.2.4 Radiell fordeling

Når vi kommer til momentene til radiell fordeling, så er situasjonen litt annerledes. Figurene 3.13 og 3.14 viser (for henholdsvis $1 \mu\text{m}$ og $2 \mu\text{m}$ laserstrålen og for alle kjøringer) første moment som funksjon av turbulensnivået i første panel og $\sqrt[n]{\langle r^n \rangle}$ for $n = 2 \dots 4$ som funksjon av første moment i de tre andre panelene. Første moment, det vil si stråleradius som funksjon av turbulensnivået kommer til å være et av hovedresultatene til denne rapporten. Dette kommer vi derfor til å diskutere i mer detalj i kapittel 4 der vi også kommer til å beregne radius i mm istedenfor piksler.

Det som vi ønsker å diskutere her er sammenhengen mellom de høyere momentene og første moment, altså det som er vist i de tre andre panelene. For $1 \mu\text{m}$ laserstrålen er $\sqrt[n]{\langle r^n \rangle} \propto \langle r \rangle$ for alle $n = 2 \dots 4$ (se figur 3.13). Videre er de tre proporsjonalitetskonstantene lik verdiene man får for en Rayleighfordeling, det vil si vi har $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$, $\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$ og $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt[4]{2}$ for henholdsvis $n = 2 \dots 4$ (se tabell 3.1 for verdiene og de grønne linjene i figur 3.13 for sammenlikningen med dataene). Vi kan altså konkludere med at radiellfordelingen til $1 \mu\text{m}$ laserstrålen tilsvarer en Rayleighfordeling, som igjen betyr at intensitetsprofilen er gaussisk.

For $2 \mu\text{m}$ laserstrålen stemmer ikke denne konklusjonen siden dataene veldig konsistent ligger over

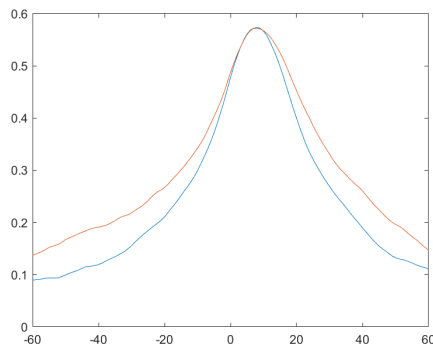


Figur 3.14 Øverst til venstre: første moment til radiell fordeling (i piksler) til $2 \mu\text{m}$ laserstrålen som funksjon av turbulensnivået gitt ved C_n^2 i $\text{m}^{-2/3}$. Videre tre paneler: $\sqrt[n]{\langle r^n \rangle}$ for $n = 2 \dots 4$ som funksjon av første moment. De grønne linjene indikerer forløpet for en Rayleighfordeling (se tabell 3.1). De svarte linjene gir forløpet til en modifisert fordeling (se tekst). Datapunkter i rødt indikerer tilfeller der strålen muligens er større enn bildet.

verdien man får for en Rayleighfordeling. For å prøve å forklare denne observasjonen har vi sett på forskjellige modifikasjoner til Rayleighfordelingen. Vi finner i vedlegg C at en multiplikasjon av Rayleighfordelingen med et førstegradspolynom av typen $(1 + \alpha \frac{r}{\sqrt{2}\sigma^2})$ fører (i første orden i α) til proporsjonalitetskonstanter som er *mindre* enn de for en umodifisert Rayleighfordeling. Det vil si at linjer basert på denne modifikasjonen ligger *under* de grønne linjene i figur 3.14. Dermed kan denne modifikasjonen utelukkes som en mulig forklaring for dataene.

Neste modifikasjon vi har undersøkt er en multiplikasjon av Rayleighfordelingen med et andregradspolynom av typen $(1 + \alpha \frac{r^2}{2\sigma^2})$. Denne modifikasjonen fører til proporsjonalitetskonstanter som (i første orden i α) er helt like proporsjonalitetskonstantene til en umodifisert Rayleighfordeling (for alle $n \geq 2$). Dermed kan heller ikke en slik modifikasjon forklare dataene.

I et tredje forsøk har vi undersøkt en radiell fordeling til en oval stråleprofil (med $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$). Her får man korreksjoner som går i riktig retning, men av en så liten størrelsesorden at man må anta en kontrafaktisk profil med et forhold av omtrent 2:1 i de to retningene for å kunne forklare de radielle momentene.



Figur 3.15 Korrelasjonsfunksjonene R_x (blå linje) og R_y (rød linje) mellom avvikene fra midlet posisjon som funksjon av bildenummerdifferansen i tidsserien. Siden korrelasjonsfunksjonen for en enkel kjøring er nokså støyende viser vi kun korrelasjonsfunksjonene midlet over alle kjøringene. Tanken om å bruke bildenummerdifferansen i tidsserien som et mål for tidsdifferansen må sies som grundig feilslått (se tekst).

Teoretisk finner man at en Laguerre-Gaußstråle har en intensitetsprofil som er en Rayleighfordeling ganget med et polynom av typen $\left(\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)^m \left[L_n^m\left(\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\right]^2$ der $L_n^m(x)$ er et Laguerrepolynom. Det enkleste ikke-trivielle polynomet er $L_1^0(x) = 1 - x$. Dette betyr samtidig, at hvis man har en Gaußstråle med en liten Laguerre-Gauß komponent (av den enkleste typen), så har man en intensitetsprofil tilsvarende en Rayleighfordeling ganget med et fjerdegrads polynom av typen $\left(1 - 2\alpha\frac{r^2}{2\sigma^2} + \alpha\frac{r^4}{4\sigma^4}\right)$. Ledet av teorien finner vi altså en god begrunnelse for at Rayleighfordelingen kan være modifisert av et fjerdegradspolynom.

Vi vet allerede fra vedlegg C at $\frac{r^2}{2\sigma^2}$ leddet ikke leverer et bidrag (i første orden i α) til proporsjonalitetskonstantene. Vi skal derfor undersøke et mulig bidrag fra $\frac{r^4}{4\sigma^4}$ leddet. For dette ser vi på den modifiserte fordelingen

$$\frac{r}{\sigma^2} \left(1 + \alpha\frac{r^4}{4\sigma^4}\right) e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr,$$

som vi må dele med $(1 + 2\alpha)$ for å få en normert fordeling. Momentene til den normerte fordelingen er gitt ved

$$\langle r^n \rangle = (2\sigma^2)^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \frac{1 + \alpha\left(\frac{n}{2} + 1\right)\left(\frac{n}{2} + 2\right)}{1 + 2\alpha}.$$

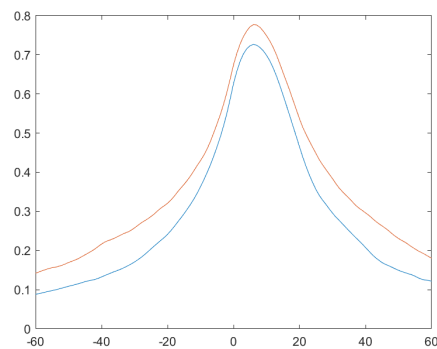
Når vi relaterer $\sqrt[n]{\langle r^n \rangle}$ med $\langle r \rangle$, så får vi

$$\frac{\sqrt[n]{\langle r^n \rangle}}{\langle r \rangle} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1 + 2\alpha}{1 + \frac{15}{4}\alpha} \sqrt[n]{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \frac{1 + \alpha\left(\frac{n}{2} + 1\right)\left(\frac{n}{2} + 2\right)}{1 + 2\alpha}}.$$

Hvis vi nå utvikler høyre side for små verdier av α så finner vi at

$$\frac{\sqrt[n]{\langle r^n \rangle}}{\langle r \rangle} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt[n]{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \left(1 + \frac{\alpha}{4}(n - 1) + O(\alpha^2)\right).$$

Vi finner altså proporsjonalitetskonstanter som er større (i første orden i α) enn de man får fra en umodifisert Rayleighfordeling. Uten å ha gjennomført en ekte tilpassning ved å beregne et 'maximum-likelihood' estimat finner vi at for $2 \mu\text{m}$ laserstrålen så kan de høyere momentene beskrives ved å anta et $\alpha \approx 20\%$ bidrag fra et fjerdegrads polynom. En liknende analyse for $1 \mu\text{m}$ laserstrålen gir en verdi for α som ligger under 1% . De svarte linjene i figur 3.14 gir forløpet til grafene med det antatte bidraget. Man ser at de svarte linjene beskriver dataene veldig bra bortsett fra noen røde datapunkter i det øvre, høyre hjørnet. Her må man huske at røde datapunkter indikerer tilfeller der man ikke vet om hele laserstrålen ble innfanget av kameraet. For disse tilfeller skal man derfor ikke bekymre seg altfor mye om at nettopp de høyere momentene (som er mest følsomme for intensitetsfordelingen langt vekk fra midtpunktet) muligens ikke blir beskrevet så bra.



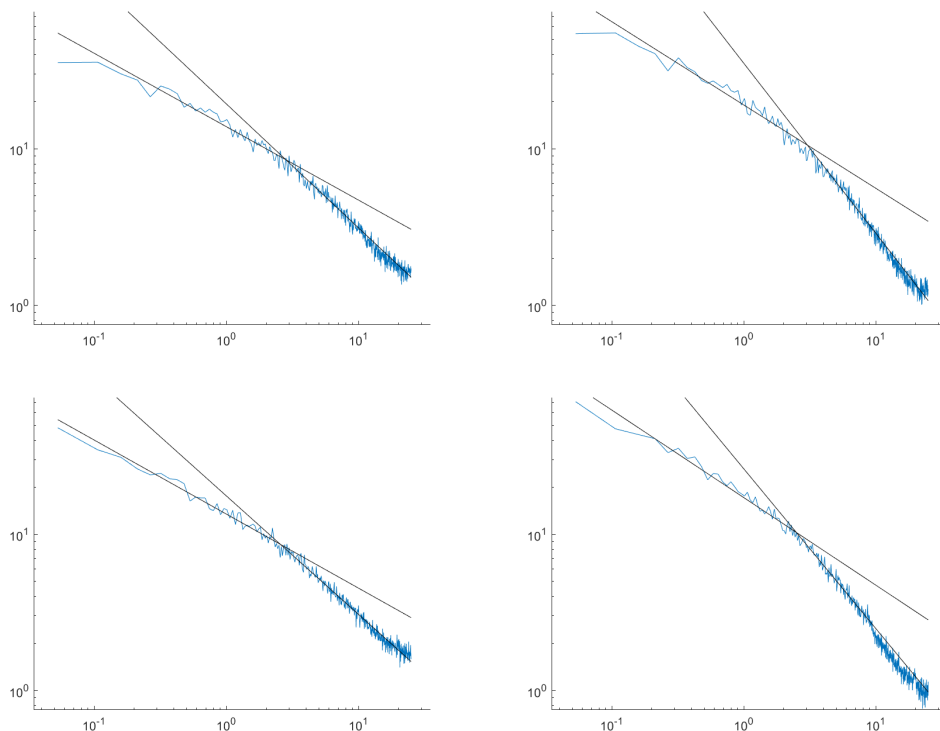
Figur 3.16 Samme som figur 3.15, bortsett fra at tidsserien til $2 \mu\text{m}$ laserstrålen er korrelert med en degradert versjon av seg selv, der i gjennomsnitt per kjøring, 16 tilfeldige datapunkter er eliminert. Likheten med figur 3.15 er stor og støtter vår tolkning av resultatene (se tekst).

3.4 Tidsrekker av strålemidtpunktet

3.4.1 Korrelasjoner i forflytningen av laserstrålene

Et spørsmål av stor interesse er hvor likt eller ulikt laserstråler med forskjellig bølgelengde blir påvirket av turbulens. Eksperimentet er i utgangspunkt velegnet til å undersøke dette spørsmålet ved at begge laserstråler blir sendt ut samtidig gjennom felles optiske elementer. En god måte å analysere påvirkningen er derfor å se på vandringen til midtpunktet til strålene. Vi har allerede sett i figur 3.8 at x og y posisjonene til midtpunktene til midlet (over en hel kjøring) strålebildene korrelerer bra med hverandre. Men siden dette fanger kun opp langtidseffekter (over en periode av 20 s) er det også interessant å se på korrelasjonen bilde for bilde, det vil si over tidsrommer tilsvarende 20 ms. For å kvantifisere graden av korrelasjon ser vi på tidsrekkeene $\Delta x_\lambda(t_i)$ og $\Delta y_\lambda(t_i)$ altså avvik til midtpunktet til de enkelte strålebildene (tatt ved tidspunkt t_i) fra midtpunktet til midlet strålebilde, for bølgelengdene $\lambda \approx 1$ og $2 \mu\text{m}$. Ut i fra tidsrekkeene danner vi korrelasjonsfunksjonen

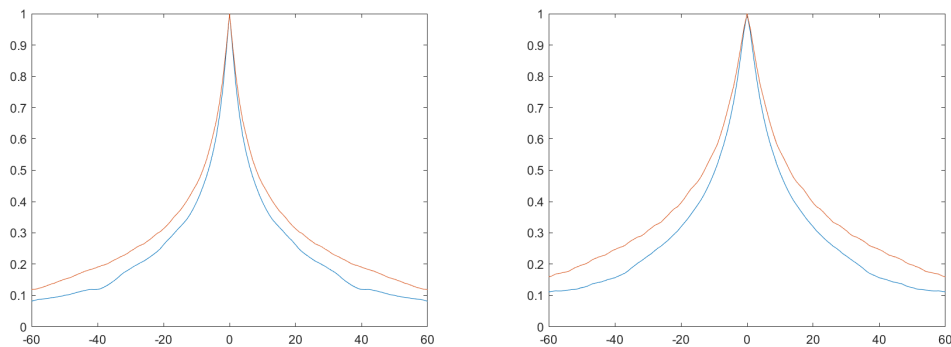
$$R_x(\tau) = \frac{\int \Delta x_1(t + \tau) \Delta x_2(t) dt}{\sqrt{\int \Delta x_1^2(t) dt \int \Delta x_2^2(t) dt}},$$



Figur 3.17 Fouriertransformert til tidsrekken som representerer avvik til strålemidtpunktene til enkeltbildene fra midlet bildet. Øvre og nedre grafer tilsvare henholdsvis x og y retningene, grafene til venstre er for $1\ \mu\text{m}$ laserstråling, de til høyre er for $2\ \mu\text{m}$ laserstråling. De dobbelt-logaritmiske grafene gir frekvensinnholdet på vertikal akse (i piksler), og frekvensen i Hz på den horisontale aksene. Svarte linjer tilsvare lokale tilpassninger med en enkel potenslov av typen Af^v .

og tilsvarende for y retningen.

Resultatene for korrelasjonsfunksjonene er gitt i figur 3.15. Her er det viktig å nevne at istedenfor faktiske tidspunkter der bildene er tatt har vi kun bildenumrene i tidsserien å forholde oss til. I prinsippet skulle det gå nøyaktig 20 ms mellom bildene, men det viser seg at spesielt SWIR kameraet gjentatte ganger dropper å ta et bilde når det skulle, slikt at etter hvert, så halter det flere bilder bak MWIR kameraet. Derfor ligger toppen av korrelasjonsfunksjonene ikke ved $\tau = 0$ (eller $\Delta N = 0$ hvis vi tenker på bildenummerdifferansen) men nærmere $\Delta N \approx 8$, som tilsvare $\tau \approx 0,16$ s. Dette kan tolkes ved at SWIR kameraet i gjennomsnitt per kjøring dropper 16 bilder (hvis begge kameraene er synkronisert ved begynnelsen av kjøringen). Hvis man antar at bildene som droppes er jevnt fordelt utover en kjøring, så betyr det videre at den underliggende korrelasjonsfunksjonen i praksis blir utsmørt over et $\Delta N = 16$ bredt interval, som igjen nok forklarer størstedelen av bredden til den observerte korrelasjonsfunksjonen. At toppunktet til korrelasjonsfunksjonen allikevel ligger så høyt som nesten 60% tyder jo på at forflytningene av de to laserstrålene i tid i utgangspunkt er veldig bra korrelert med hverandre. Et siste påfallende punkt er at korrelasjonsfunksjonen R_y er en del bredere enn R_x . Rent fysisk betyr det at avvik av stråleretningen i vertikal retning er litt lengre



Figur 3.18 Autokorrelasjonsfunksjonen $R_x(\tau)$ (blå linje) og $R_y(\tau)$ (rød linje) for $1 \mu\text{m}$ laserstrålen (venstre) og $2 \mu\text{m}$ laserstrålen (høyre) som funksjon av bildenummerdifferansen i tidsserien.

vedvarende enn avvik i horisontal retning.

Diskusjonen innbyr også til følgende eksperiment. Hvis man tar utgangspunkt i dataene fra $2 \mu\text{m}$ laserstrålen for så å eliminere i gjennomsnitt 16 tilfeldige datapunkter per kjøring, hvordan hadde korrelasjonsfunksjonen av det hele datasettet med det degraderte settet vært? Resultatet vises i figur 3.16 og er veldig likt de faktiske korrelasjonsfunksjonene mellom avvikene til midtpunktene til $1 \mu\text{m}$ og $2 \mu\text{m}$ laserstrålene. Fasongene og spesielt breddene til de tilsvarende korrelasjonsfunksjonene i figurene 3.15 og 3.16 er så å si like. Toppunktene til de artifielle korrelasjonsfunksjonene ligger en del høyere enn toppunktene til de faktiske korrelasjonsfunksjonene. Dette kan fint forklares ved at for de artifielle korrelasjonsfunksjonene, så tar man utgangspunkt i to helt like tidsserier før man eliminerer enkelte datapunkter, mens for de faktiske korrelasjonsfunksjonene så trenger tidsseriene i utgangspunktet ikke være helt like. Det dreier seg jo tross alt om to uavhengige målinger.

3.4.2 Frekvensinnholdet i forflytningen av laserstrålene

Et annet spørsmål av interesse er hvor *fort* turbulensen forandrer seg slik at laserstrålen forflytter seg fra sted til sted. Her dreier det seg altså ikke om hvor *mye* den forflytter seg, men kun tidsskalaen. Tanken bak dette er at hvis man hadde en tipp-tilt mekanisme som kunne vinkle laserstrålen slikt at den alltid hadde truffet samme sted i målområdet, hvor fort måtte den kunne reagere på forandringer av turbulensen? Dette spørsmålet ligger faktisk litt utenfor diskusjonen fra delene I og II til denne rapportserien, siden der diskuterte vi middelværdier over alle realiseringer av turbulens uten å tenke på tid i det hele tatt. Slike middelværdier over realiseringer er lik middelværdier over tid, hvis prosessen man undersøker er ergodisk. Vi skal ikke her diskutere om optisk turbulens er en ergodisk prosess eller ikke – det er antagelig fortsatt ubesvart spørsmål.⁵ Men selv om en prosess er ergodisk, så har man det konseptuelle problemet at en realisering av alle mulige tilstander til prosessen behøver uendelig mye tid! Derfor er et nokså viktig spørsmål hvor lenge en måleperiode

⁵For en stasjonær gaussisk prosess med middelværdi lik null som vi antar for eksempel i diskusjonen om Markovap-
proksimasjonen i del I av rapportserien, så er prosessen ergodisk hvis autokorrelasjonsfunksjonen er kontinuerlig og
integralet over absoluttverdien til autokorrelasjonsfunksjonen eksisterer.

behøver å være for i det hele tatt kunne si at middelveiden over tid mer eller mindre tilsvarende middelveiden over alle mulige (eller i hvert fall de mest typiske) realiseringer av den stokastiske prosessen? Dette er spesielt viktig å vite hvis man ønsker å sammenlikne måleresultater basert på tidsmidler til resultater fra enten teoretiske beregninger eller simuleringer, som begge baserer seg på middelveider over henholdsvis alle mulige eller tilstrekkelig mange realiseringer. Vi skal i det følgende prøve å besvare begge spørsmålene.

Vi begynner med å fouriertransformere tidsrekkene som tilsvarende avvik (i både x og y retningen) til midtpunktene til de enkelte strålebildene fra midtpunktet til midlet strålebildet for hver kjøring. Siden dataene igjen er veldig støyende, midler vi de fouriertransformerte over alle kjøringene. Med dette mister vi muligheten til å undersøke denne viktige størrelsen som funksjon av turbulensnivået, men vi har desverre enten for korte kjøringene eller for få kjøringene ved samme turbulensnivå for å kunne gjøre denne analysen. De fouriertransformerte er gjengitt i figur 3.17 separat for begge retninger og begge bølgelengder. I praksis har vi beregnet

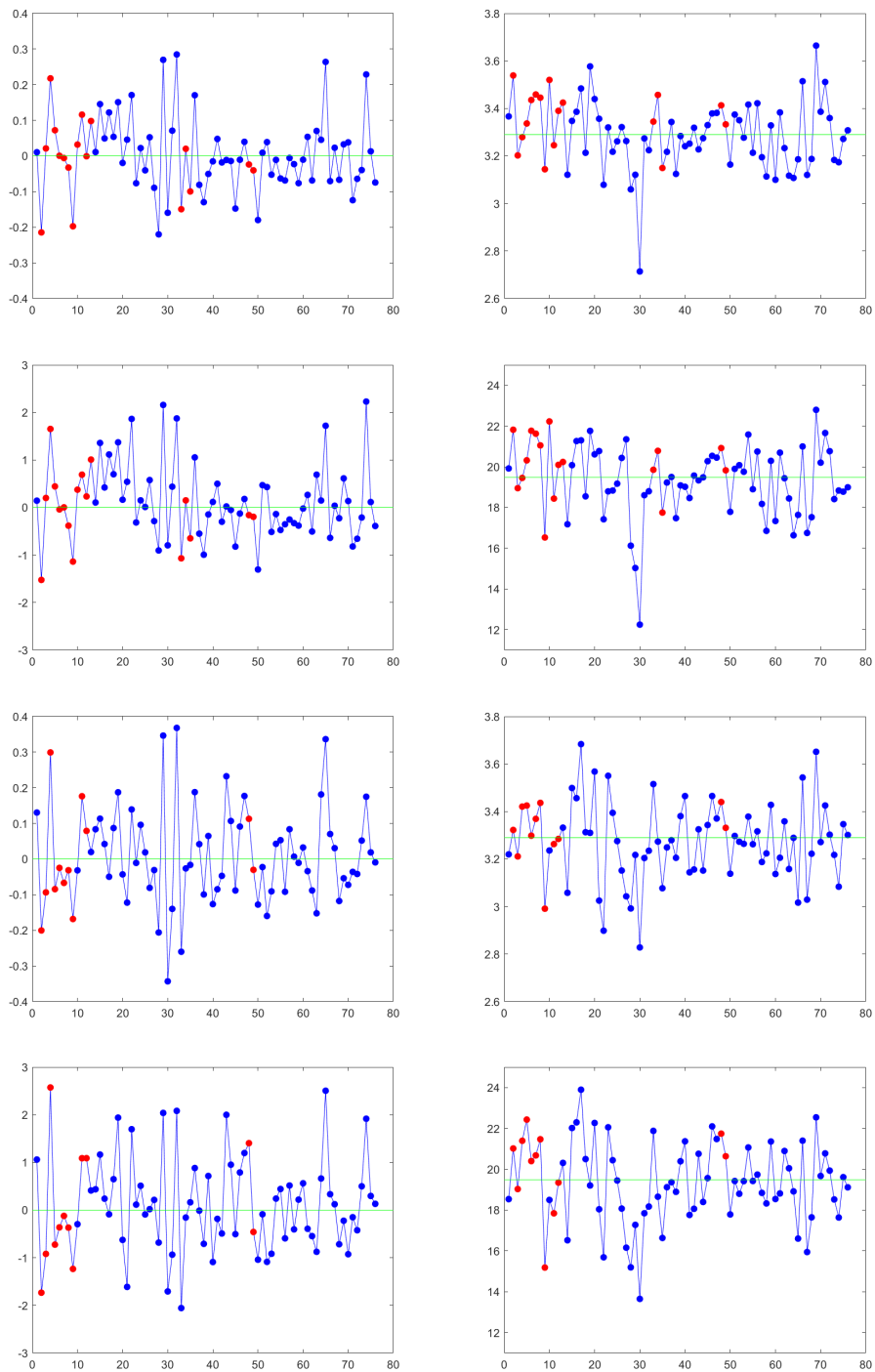
$$\xi(f_x) = \frac{1}{\Delta t} \left| \int [x(t) - \bar{x}] e^{-2\pi i f_x t} dt \right|$$

og tilsvarende for y retningen, siden vi ikke er interessert i den relative faseforskyvningen mellom de forskjellige fourierkomponentene til tidsrekken, kun deres amplituder. Hvis man antar at måleperioden varer lenge nok for å kunne observere de mest typiske realiseringer, så burde man ikke ha langvarige korrelasjoner i datasettet. Det betyr at under en viss frekvens, så burde $\xi(f < f_{\min}) \rightarrow 0$. Dette er ikke noe vi observerer i praksis! Datapunktet for $f = 0$ (som ikke er vist i figur 3.17 siden x -aksen er logaritmisk) er selvsagt omtrent lik null, men det er på grunn av at middelveiden til tidsrekken blir trukket fra før fouriertransformasjonen. Muligens for x retningen (de øvre panelene i figur 3.17) kan man skimte en slags utflatning mot den laveste oppløste frekvensen (omtrent 0,05 Hz), mens for y retningen har man åpenbart fortsatt ganske langvarige korrelasjoner i tidsrekken (som man også kunne se i korrelasjonsfunksjonen i figur 3.15). Vi kan dermed konkludere at tidsmidlene fra kjøringene ikke nødvendigvis er representative for middelveidene over alle (eller typiske) realiseringer. Det betyr også at det ikke er fysisk meningsfullt å diskutere turbulensnivåer oppløst på slike tidsskalaer.

Når det gjelder spørsmålet om hvor kjapt en tipp-tilt mekanisme må kunne reagere, så er svaret litt mer enkelt. Vi ser at de fouriertransformerte har to adskilte områder med forskjellig helning i de dobbelt-logaritmiske grafene. Disse områdene lar seg tilpasse av rette linjer som betyr at de følger hver sin potenslov. Med en enkel tilpassning finner vi at områdene mellom 0,1 Hz og 2,7 Hz lar seg tilpasse med en omtrentlig $1/\sqrt{f}$ avhengighet. Områdene mellom 4 Hz og 9 Hz lar seg tilpasse med en omtrentlig $1/f$ avhengighet (for 1 μ m laserstråling er eksponenten litt lavere og ligger rundt $-0,8$). Kryssningspunktet mellom linjene ligger mellom omtrent 2,5 Hz og 3 Hz. Vi kan tolke denne frekvensen som en slags grensefrekvens for langvarige korrelasjoner. Utover denne frekvensen minker $\xi(f)$ i hvert fall ganske fort. Vi kan ikke se når $\xi(f)$ blir lik null (altså over hvor kort et tidsrom turbulensen kan sies å være statistisk). For dette måtte vi se enda en overgang til et enda brattere forløp av kurven. Dette krever selvfølgelig at vi kan ta bilder med en høyere frekvens enn det vi gjør nå.

En annen mulighet til å karakterisere hvor fort laserstrålen forflytter seg er ved hjelp av autokorrelasjonsfunksjonen. Autokorrelasjonsfunksjonen er gitt ved

$$R_x(\tau) = \frac{\int \Delta x(t + \tau) \Delta x(t) dt}{\int \Delta x^2(t) dt}$$



Figur 3.19 Forventningsverdier $\langle \phi^n \rangle$ for $n = 1 \dots 4$ (i radianer) til vinkelfordelingen for kjøring med $1 \mu\text{m}$ (øvre paneler) og $2 \mu\text{m}$ (nedre paneler) laserstrålen. De grønne linjene viser forventningen til en stokastisk prosess med uniform vinkelfordeling. Røde datapunkter indikerer kjøring der laserstrålen muligens er større enn bildet.

og tilsvarende for y retningen og er dermed nokså lik korrelasjonsfunksjonen som vi diskuterer i kapittel 3.4.1. Igjen produserer vi autokorrelasjonsfunksjonen midlet over alle kjøring. Når man sammenlikner autokorrelasjonsfunksjonen med korrelasjonsfunksjonen fra figur 3.15, så ser man umiddelbart at autokorrelasjonsfunksjonen er mye spissere. Det er selvfølgelig resultatet av at korrelasjonsfunksjonen viser korrelasjonen mellom to litt usynkroniserte tidsrekker, mens autokorrelasjonsfunksjonen er basert på kun én tidsrekke hver. Her spiller det også liten rolle at enkelte datapunkter i tidsrekken til $1 \mu\text{m}$ kameraet mangler. Hvis vi fortsatt antar at omtrent 16 av 1000 datapunkter mangler per kjøring, så betyr det kun at avstand mellom datapunktene i tidsrekken er i middel 1,6% lengre enn de nominale 20 ms.

Når vi sammenlikner autokorrelasjonsfunksjonene med hverandre så ser vi at funksjonene for y retningen er en god del bredere enn de for x retningen. Det er egentlig den same observasjonen som vi gjorde i sammenheng med figur 3.17. Der så vi at for begge bølgelengder så ligger datapunktet til den laveste frekvensen (0,05 Hz) for y retningen mye høyere enn det tilsvarende datapunktet for x retningen. Dette betyr som sagt at i y retningen, så observerer vi mer langvarige korrelasjoner enn i x retningen. Videre ser vi at autokorrelasjonsfunksjonene til $2 \mu\text{m}$ laserstrålen for begge retninger er bredere enn de tilsvarende autokorrelasjonene til $1 \mu\text{m}$ laserstrålen. Også dette gjenspeiler seg i figur 3.17 ved at datapunktene ved lave frekvenser (3 Hz og nedover) til $2 \mu\text{m}$ laserstrålen ligger høyere enn de tilsvarende datapunktene for $1 \mu\text{m}$ laserstråling.

Videre er det interessant å se om en eller annen grensefrekvens kan ekstraheres fra disse grafene. Vi har i vedlegg D skissert en metode som relaterer grensefrekvensen ω_0 til modellen

$$\xi(\omega) = \xi_0 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^\nu$$

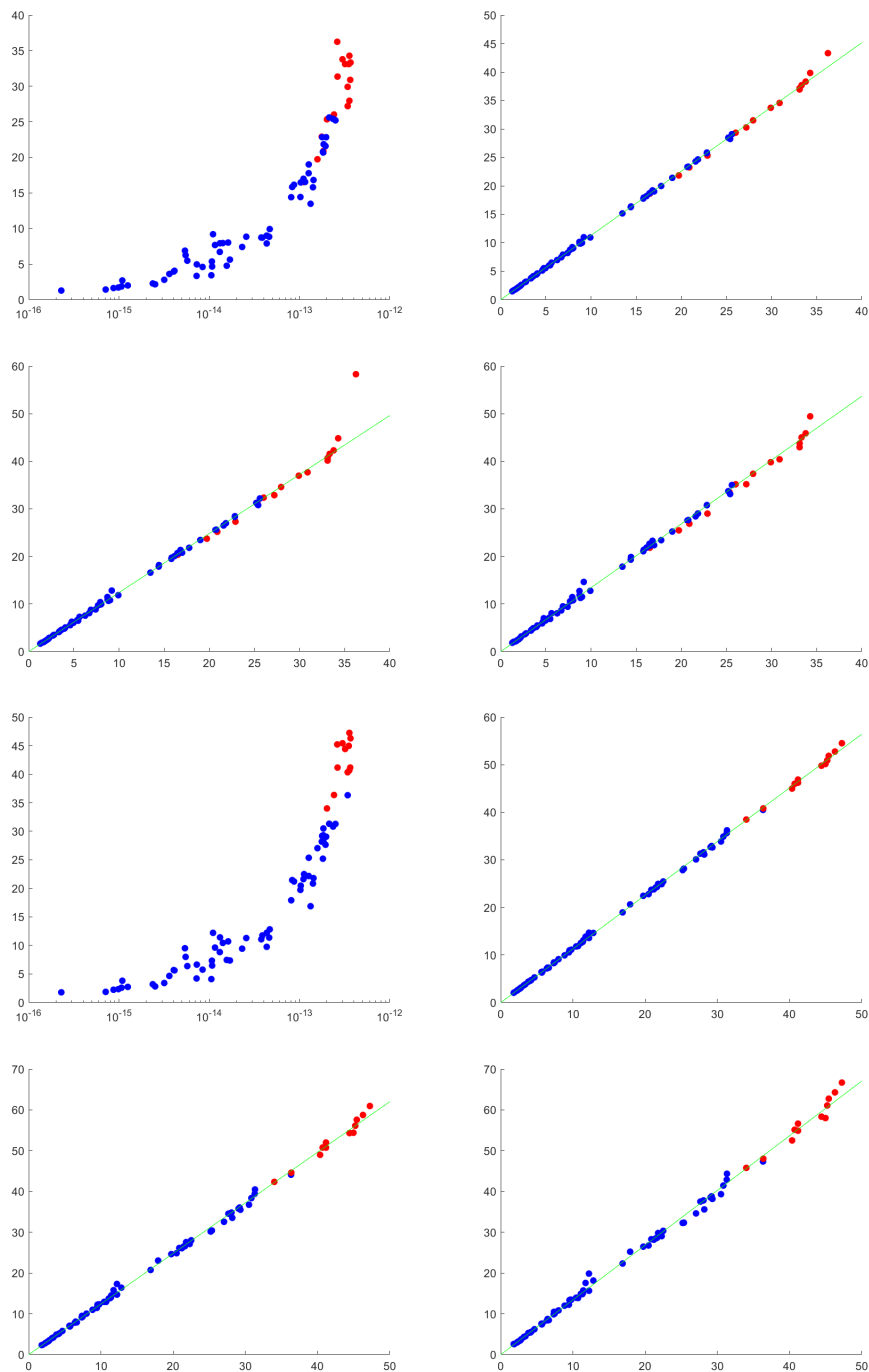
til andrederiverte til autokorrelasjonsfunksjonen ved $\tau = 0$. Denne sammenhengen er gitt ved

$$R''(\tau = 0) = -\frac{2\omega_0^2}{(2\nu + 2)(2\nu + 3)}.$$

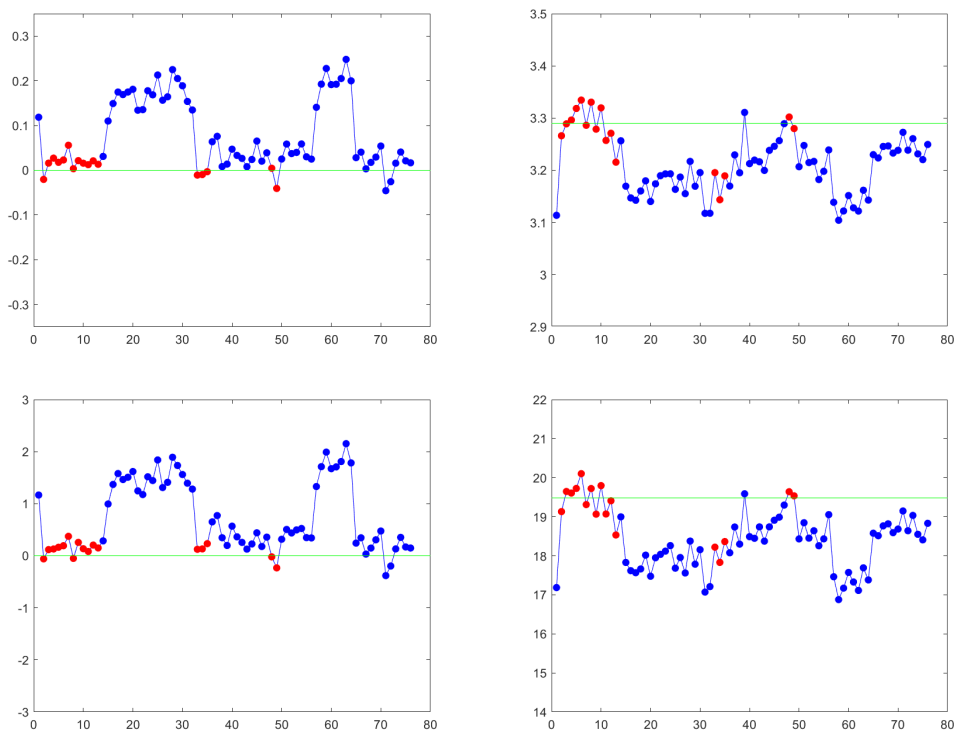
Her er det viktig å huske at den observerte $\xi(\omega)$ ikke tilsvare nøyaktig modellen som ligger til grunn for denne analysen. Det betyr at man må regne med at en slik analyse inkluderer en systematisk feil som bunner i en feil antakelse om modellen. Hvis vi nå allikevel ekstraherer krumningen til $R(\tau)$ ved nullpunktet og setter inn $\nu \approx \frac{1}{2}$ fra analysen av figur 3.17, så får vi en grensefrekvens tilsvarende 9–10 Hz for $1 \mu\text{m}$ laserstråling og 6–7 Hz for $2 \mu\text{m}$ laserstråling. At disse grensefrekvensene er litt høyere enn de vi finner ved analysen av figur 3.17 henger vel sammen med at $\xi(f)$ ikke blir lik null ved grensefrekvensen, men fortsetter med en litt større (negativ) helning. At $1 \mu\text{m}$ laserstråling gir en større grensefrekvens i denne analysen enn $2 \mu\text{m}$ laserstråling kan dermed relateres til at helningen til $\xi(f)$ for $1 \mu\text{m}$ laserstråling for frekvenser over 3 Hz er litt slakkere enn den tilsvarende størrelsen for $2 \mu\text{m}$ laserstråling.

3.4.3 Størrelsen til forflytningen av laserstrålen

Selv om forflytningen av midtpunktet til laserstrålen kun er en delaspekt av optisk turbulens kan vi prøve, på en fenomenologisk basis, å beskrive forflytningen som sin egen, stokastisk prosess. En enkel modell for tidsrekken som vi har målt er å anta at forflytningen i x og y retningen er en



Figur 3.20 Forventningsverdien $\langle r \rangle$ (i piksler) som funksjon av turbulensnivået C_n^2 (første panel) og $\sqrt[n]{\langle r^n \rangle}$ som funksjon av $\langle r \rangle$ for $n = 2 \dots 4$ (neste tre paneler, alt i piksler) til den radielle fordelingen for $1 \mu\text{m}$ laserstrålen og tilsvarende (nedre 4 paneler) for $2 \mu\text{m}$ laserstrålen. De grønne linjene viser relasjonen for en Rayleighfordelingen. Røde datapunkter indikerer kjøringene der laserstrålen muligens er større enn bildet.



Figur 3.21 De første fire momentene til vinkelfordelingen (i radianer) til midlet øyeblikksbildet for kjøring med 1 μm laserstrålen. De grønne linjene tilsvarer momenter til en uniform vinkelfordeling (se tabell 3.1). Datapunkter i rødt indikerer tilfeller der strålen muligens er større en bildet.

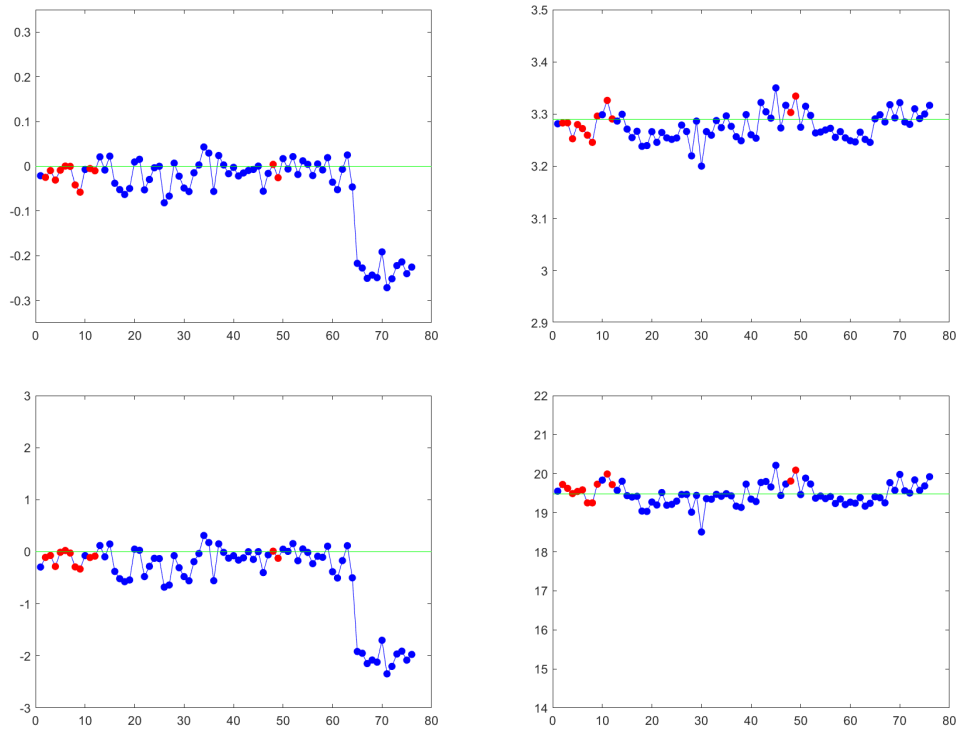
gaussisk prosess med forsvinnende middelværdi (så lenge vi beskriver avvik til strålemidtpunkt til enkeltbildene fra strålemidtpunkt til midlet bilde). En videre forenkling kunne vært å anta at fordelingsfunksjonene for forflytning i de to retningene har samme bredde.

Med dette har vi egentlig helt nøyaktig den samme situasjonen som når vi diskuterte analysen av midlet bilde i kapittel 3.3. Forskjellen er at man ikke prøver å analysere en intensitetsfordeling til et bilde, men en fordeling av rundt 1000 strålemidtpunkter (for hver tidsrekke). Hvert eneste av disse punktene er altså en realisering av sannsynlighetsfordelingen

$$p(x, y)dxdy = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dxdy.$$

Akkurat som før kan vi transformere denne fordelingen til planare polarkoordinater og får en uniform vinkelfordeling og en Rayleighfordeling for den radielle koordinaten. For å se om de eksperimentelle fordelingene tilsvarer modellen kan vi sammenlikne eksperimentelle momenter med momentene til modellen fra tabell 3.1. Dette er gjort i figur 3.19 for vinkelfordelingen og i figur 3.20 for den radielle fordelingen.

Vi observerer at momentene til vinkelfordelingen til stråleforflytningen (se figur 3.19) fluktuerer en del mer enn de tilsvarende momentene til midlet bilde (se figurene 3.9 og 3.10). På den andre siden,

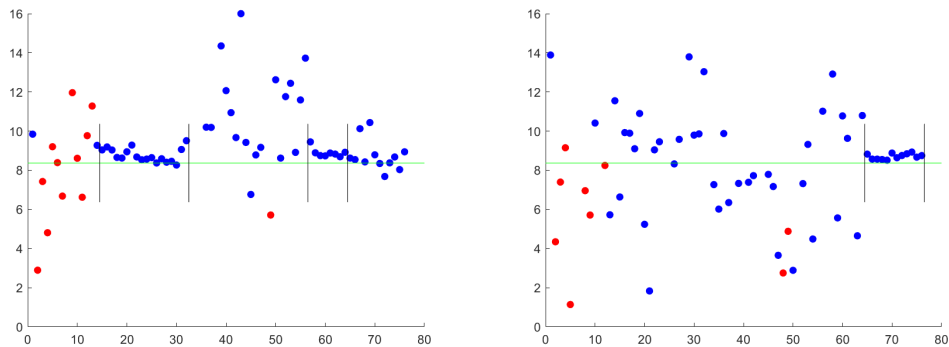


Figur 3.22 De første fire momentene til vinkelfordelingen (i radianer) til midlet øyeblikksbildet for kjøring med $2\ \mu\text{m}$ laserstrålen. De grønne linjene tilsvarer momenter til en uniform vinkelfordeling (se tabell 3.1). Datapunkter i rødt indikerer tilfeller der strålen muligens er større en bildet.

så ser vi ikke noe systematisk avvik fra forventningene til en uniform vinkelfordeling, som vi gjorde i tilfelle $2\ \mu\text{m}$ laserstråling for de odde momentene fra kjøring 65 og utover (se figur 3.10). Det betyr at de observerte momentene er forenelig med en uniform vinkelfordeling.

Videre observerer vi at de første momentene til den radielle fordelingen til stråleforflytningen for begge laserstråler korrelerer veldig bra med turbulensnivået (se panelene 1 og 5 i figur 3.20). Hvis man sammenlikner med de tilsvarende panelene til figurene 3.13 og 3.14 som viser første moment til radiellfordeling til midlet bilde, så ser man også en viktig forskjell. Mens radius til midlet bilde går mot en endelig verdi for neglisjerbar turbulens (på grunn av diffraksjon), så forsvinner middelverdi til radiell stråleforflytning omtrent helt. Vi får altså for forflytningen en ganske annen avhengighet av turbulensnivået enn for radius til midlet bilde. Denne avhengigheten kommer vi til å diskutere i mer detalj i kapittel 4.

Til slutt ser vi igjen på de høyere momentene som funksjon av første moment. Helt konkret ser vi på $\sqrt[n]{\langle r^n \rangle}$ som funksjon av $\langle r \rangle$ (se figur 3.20). De fleste datapunktene faller ganske nøyaktig på de grønne linjene, som tilsvarer forventningene for en radiell Rayleighfordeling (se tabell 3.1). Det er til og med sant for $2\ \mu\text{m}$ laserstråling. Her husker vi at det ikke var tilfelle for radiell fordeling til midlet bilde (se figur 3.14). Denne gangen trengte vi å inkludere et fjerdegrads polynom for å kunne beskrive momentene. Det er ikke nødvendig for å beskrive momentene til radiell stråleforflytning.



Figur 3.23 Forholdet mellom tredje og første moment til vinkelfordeling (i radianer) for kjøringene med SWIR (venstre) og MWIR (høyre) kameraet. De horisontale grønne linjene tilsvarer $\pi^2 - \frac{3}{2}$ som er forventningen basert på den modifiserte vinkelfordelingen. De vertikale svarte linjene avgrensner kjøringene der man observerer oddetallsmomenter som er sterkt avvikende fra null.

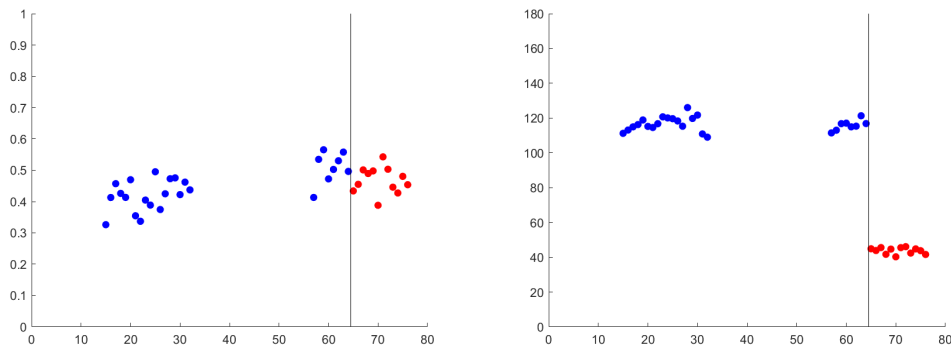
Vi kan altså konkludere at de observerte momentene til den radielle fordelingen er forenelig med en Rayleigh fordeling.

Med disse observasjonene angående vinkelfordeling og radiell fordeling kan vi konkludere med at stråleforflytningen kan beskrives som en gaussisk stokastisk prosess med forsvinnende middelværdi, der bredden til gaussfordelingen korrelerer godt med turbulensnivå (den helt konkrete avhengigheten kommer vi til å diskutere i kapittel 4). Videre gir spektralanalysen til tidsrekken til forflytningen et frekvensinnhold som er gjengitt i figur 3.17 (innenfor våre eksperimentelle begrensninger angående bilderate og lengden til tidsrekken). Vi har klart å beskrive stråleforflytningen ganske utfyllende.

En veldig oppmersom leser kunne kanskje klage på at ikke alle kjøringene er representert i figur 3.20. Helt konkret mangler verdien for kjøring 48 i panelene 2–4, og verdien for kjøring 2 i panel 4. Vi har altså kun henholdsvis 75 og 74 datapunkter i disse panelene. Videre ser man at et datapunkt i panel 3 (verdien for kjøring 2) ligger langt over den grønne linjen. Det er også grunnen for at de andre verdiene mangler – de ligger så langt over den grønne linjen i de tilsvarende panelene, at datapunktene rett og slett ikke får plass i grafene. Hvorfor akkurat disse to kjøringene ikke faller i systematikken er litt uklart, men det dreier seg om to røde kjøringene, det vil si om kjøringene der vi ikke kan være sikre på om at hele laserstrålen fanges opp av kameraet. Om det er årsaken til at momentene blir såpass avvikende er som sagt uklart, men det hindrer oss i hvert fall fra å undersøke dette videre. Vi har rett og slett ikke fanget opp laserstrålen godt nok for å kunne konkludere i denne saken.

3.5 Middell over tidsrekker av enkeltbilder

Vi har fra før karakterisert midlet bildet over en hel kjøring i kapittel 3.3. Videre har vi karakterisert forflytningen (i tid og avstand innenfor en kjøring) til strålemidtpunktet relativ til strålemidtpunktet til midlet bildet i kapittel 3.4. En tredje mulighet er nå å karakterisere enkeltbildene relativ til deres



Figur 3.24 Amplituden (venstre) og fasen (høyre) til den modifiserte vinkelfordelingen for $1\ \mu\text{m}$ (blå symboler) og $2\ \mu\text{m}$ (røde symboler) laserstrålen. De vertikale svarte linjene skiller kjøringene før fra kjøringene etter refokuseringen (se diskusjonen i kapittel 3.3.2.3).

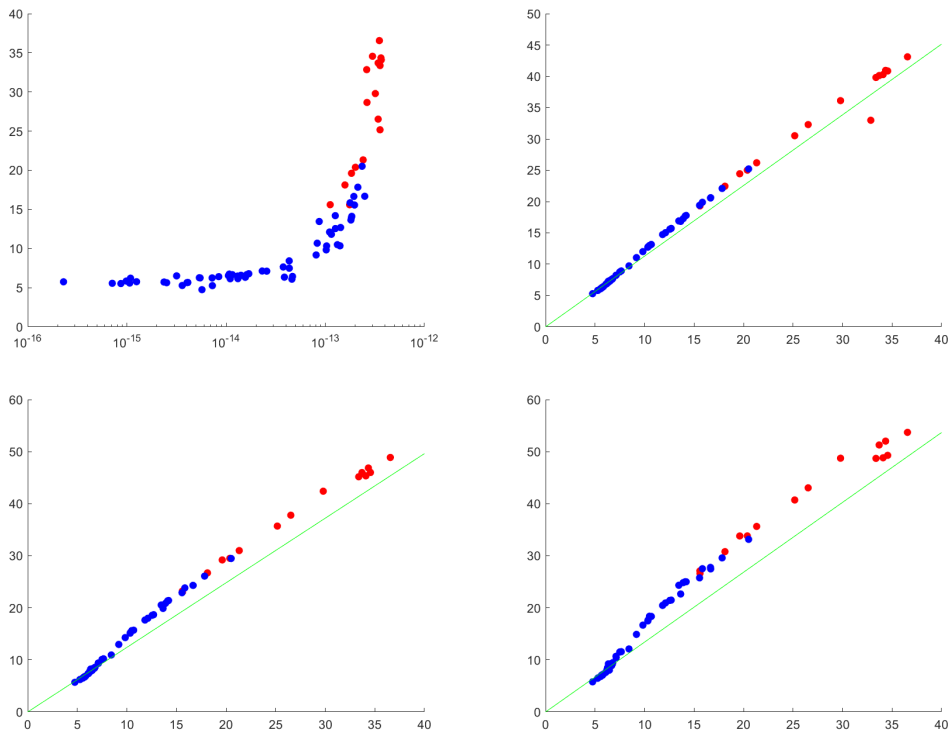
individuelle strålemidtpunkter og midle disse karakteristika over en hel kjøring. Her kan vi tenke oss to algoritmer. I den ene metoden beregner vi momentene til intensitetsfordelingen relativ til det individuelle strålemidtpunktet, for så å beregne gjennomsnitt for alle disse momentene over alle bilder i en kjøring. I den andre metoden summerer vi intensitetsfordelingene til alle bilder i en kjøring, men sideforskjøvet, slikt at alle individuelle strålemidtpunkter faller sammen i origo. Deretter beregner vi momentene til den sammenlagte intensitetsfordelingen. Man finner lett ut at begge algoritmer gir samme resultat hvis total pikselverdi per bilde er konstant over en kjøring. Siden denne betingelsen er oppfylt med tilstrekkelig nøyaktighet bruker vi den første metoden, siden den er enklere å programmere. Resultatene tilsvarer midler over øyeblikksbilder, der øyeblikkets varighet er gitt ved kameraenes integrasjonstid, som er noen titalls μs i tilfelle SWIR kamera og noen hundretalls μs i tilfelle MWIR kamera (se figur 3.7).

3.5.1 Vinkelfordelinger

Vi begynner med å se på vinkelfordelingen til $1\ \mu\text{m}$ laserstrålen. De fire første momentene er gjengitt i figur 3.21. Her minner vi om tilsvarende diskusjoner om vinkelfordelingen til midlet strålebilde i kapittel 3.3.2.3. Det som er interessant her er at indisier for en ikke-uniform vinkelfordeling er mye mer fremtredende for midlet øyeblikksbilde enn for midlet bildet generelt sett (se figur 3.9). Det kommer nok av at stråleforflytningen, som vi har sett kan tenkes som sin egen gaussisk stokastisk prosess, utsmører en mulig ikke-uniform vinkelfordeling til øyeblikksbildene til de grader at den blir ugjenkjennelig i midlet strålebilde.

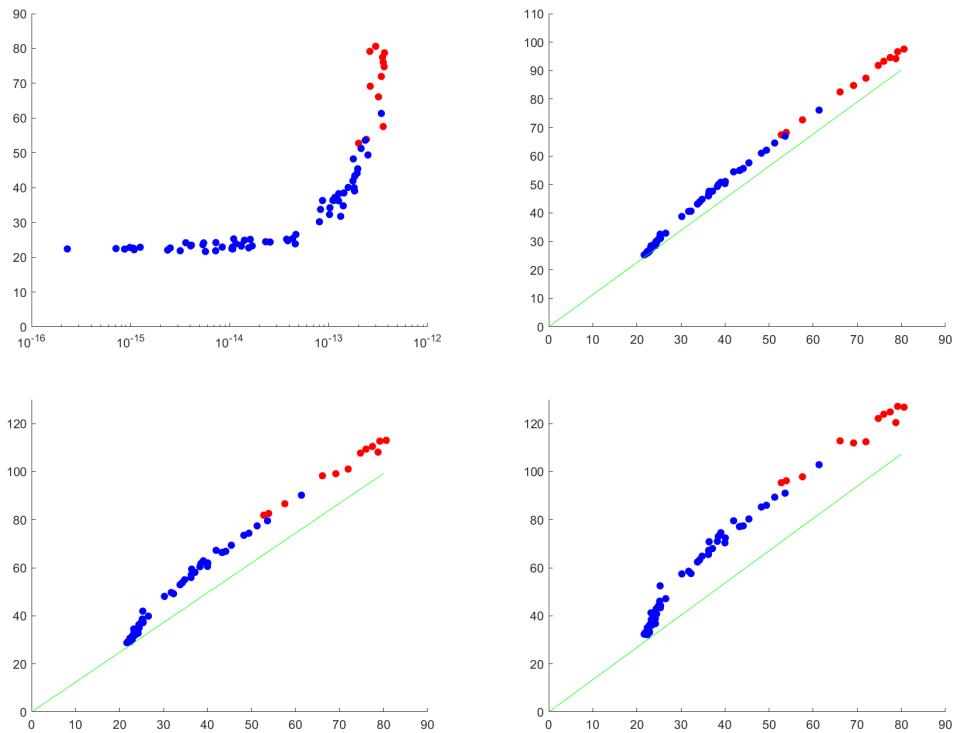
Videre ser vi på vinkelfordelingen til $2\ \mu\text{m}$ laserstrålen. Her er de første fire momentene gjengitt i figur 3.22. Denne figuren ser ut som en mindre støyende utgave av figur 3.10, som altså viser de tilsvarende momentene til midlet bilde. Også her introduserer stråleforflytningen ganske mye støy. Allikevel er den ikke-uniforme vinkelfordelingen fortsatt gjenkjennelig i momentene til midlet bilde.

Vi skal som i kapittel 3.3.2.3 prøve å ekstrahere fasongen til vinkelfordelingen ut fra momentene.



Figur 3.25 Første panel: forventningsverdien $\langle r \rangle$ til midlet øyeblikksbilde (i piksler) som funksjon of turbulensnivået C_n^2 for $1 \mu\text{m}$ laserstrålen. De andre tre panelene viser $\sqrt[n]{\langle r^n \rangle}$ som funksjon av $\langle r \rangle$ for $n = 2 \dots 4$ (alle i piksler). De grønne linjene tilsvarer det man forventer fra en Rayleighfordeling. Røde datapunkter er fra kjøringene der laserstrålen muligens er større enn bildet.

Siden vi bruker den samme modellen som før, ser vi først på forholdet mellom tredje og første moment (se figur 3.23). De områdene som viser avvik fra uniform vinkelfordeling i figurene 3.21 og 3.22 er nå avgrenset av korte, svarte vertikale linjer. Innenfor disse områdene følger forholdet mellom momentene akkurat vår modell for en ikke-uniform vinkelfordeling. Innenfor disse områdene kan vi nå igjen formulere kombinasjoner av første og andre moment (se diskusjonen i kapittel 3.3.2.3) som gir modellparametere tilsvarende amplituden og den relative fasen (i forhold til x retningen, det vil si horisontalen). Disse størrelsene presenterer vi i figur 3.24. Konklusjonen blir egentlig den samme som i kapittel 3.3.2.3, bortsett fra at vi ser nå at $1 \mu\text{m}$ laserstrålen hadde en ikke-uniform vinkelfordeling allerede for kjøringene 15–32. Dette var kanskje ikke så åpenbart under feltforsøket, siden turbulensen var såpass høy at stråleforflytningen maskerte denne anisotropien. Pussig nok forsvant anisotropien etter kjøring 32. Dette var andre kjøring på torsdagen. Logboken forteller ingenting om noe refokusering eller liknende på dette tidspunktet, men det er påfallende at nettopp etter denne kjøringen, så var det en pause på over en halvtime, mens ellers startet vi kjøringene med 10 minutters mellomrom. Man ser også i figur 3.8 at strålene forflyttet seg litt sidelengs mellom kjøring 32 og kjøring 33. Noe har nok skjedd med oppsettet som ikke ble notert i logboken. Anisotropien dukket så opp igjen ved rundt kjøring 57 og der er det skrevet i logboken at strålene ble flyttet litt opp (se også figur 3.8). Om det er en sammenheng er uklart.

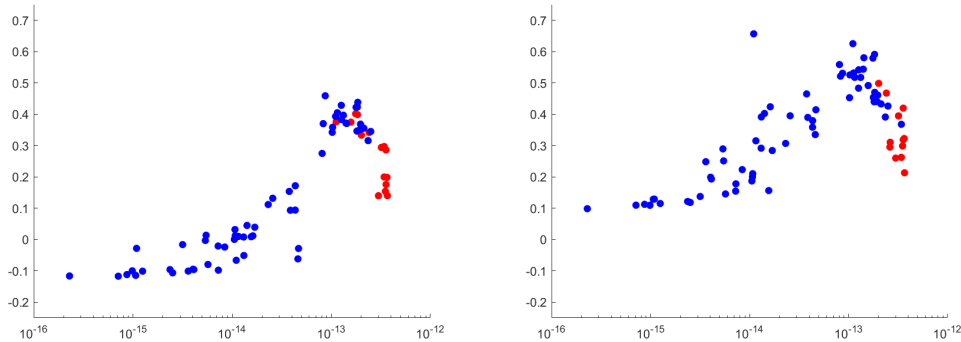


Figur 3.26 Første panel: forventningsverdien $\langle r \rangle$ til midlet øyeblikksbilde (i piksler) som funksjon of turbulensnivået C_n^2 for $2 \mu\text{m}$ laserstrålen. De andre tre panelene viser $\sqrt[n]{\langle r^n \rangle}$ som funksjon av $\langle r \rangle$ for $n = 2 \dots 4$ (alle i piksler). De grønne linjene tilsvare det man forventer fra en Rayleighfordeling. Røde datapunkter er fra kjøringene der laserstrålen muligens er større enn bildet.

3.5.2 Radiell fordeling

Momentene til den radielle fordelingen til øyeblikksbildene er gitt i figurene 3.25 og 3.26, for henholdsvis $1 \mu\text{m}$ og $2 \mu\text{m}$ laserstrålene. Her ser vi at i motsetning til midlet bilde (se figurene 3.13 og 3.14), så kan hverken SWIR eller MWIR laserstrålen beskrives ved en radiell Rayleighfordeling. Videre, så er det umulig å beskrive de høyere momentene ved et enkelt, konstant bidrag fra et fjerdegradspolynom som vi gjorde i tilfelle midlet bilde til MWIR laserstrålen. Avvik fra Rayleighfordelingen er mye mer fremtredende enn i tilfelle midlet bilde. Det er lik situasjonen med vinkelfordelingen, der vi kunne se et mye mer fremtredende avvik fra uniform fordeling for øyeblikksbildene enn for midlet bilde (se kapittel 3.5.1). Grunnen er sikkert den samme, nemlig at stråleforflytningen, som kan tenkes som sin egen stokastisk prosess maskerer breddeøkningen til øyeblikksbildene.

Det man ser i figur 3.25 er at ved lavt turbulensnivå, det vil si $C_n^2 < 10^{-13} \text{ m}^{-2/3}$, tilsvarende $\langle r \rangle < 10$ piksler, så ser de høyere momentene ut til å følge forventningen fra en Rayleighfordeling. Men derfra og oppover, så blir de høyere momentene større enn forventningen. Det betyr at ikke bare blir strålen større, men den begynner også å avvike fra en Rayleighfordeling ved at den får



Figur 3.27 Vertikal akse: estimat for avvik fra en gaussisk strålefasong gitt ved størrelsen α til et fjerdeordens ledd (se tekst for detaljer) for $1 \mu\text{m}$ (venstre) og $2 \mu\text{m}$ (høyre) laserstrålen. Avvik fra gaussisk fasong øker systematisk med økende turbulensnivå gitt ved C_n^2 i $\text{m}^{-2/3}$ (horisontal akse). Datapunktene i rødt er fra kjøring der laserstrålen muligens er større enn bildet. Disse punktene (og noen av de blå punktene ved høye verdier av C_n^2) ser ikke ut til å følge den systematiske økningen.

en tykkere hale. Det ser ikke ut som om akkurat dette fenomenet er spesielt bra kvantifisert i litteraturen. Typisk med for eksempel Rytovapproximasjonen er at man får en gaussisk stråle der eksponenten er modifisert ved en konfluent hypergeometrisk funksjon (vi kommer til å presentere regnestykket i en senere del av denne rapportserien). Problemet med dette er at integralet over intensitetsfordelingen ikke konvergerer. Det man gjør isteden er at man tilnærmer den konfluente hypergeometriske funksjonen med første ordens Taylorpolynom for små argumenter for så å tolke resultatet som en ren breddeøkning til en gaussisk stråle.

En ganske lik situasjon har vi i tilfelle $2 \mu\text{m}$ laserstrålen. Også her ser man at for de laveste turbulensnivåene, det vi si $C_n^2 < 10^{-13} \text{ m}^{-2/3}$, tilsvarende $\langle r \rangle < 25$ piksler, så følger de høyere momentene omtrent det man forventer for en Rayleighfordeling, men utover dette, så ser man tydelige avvik. Vi skal i det følgende prøve å kvantifisere avviket fra Rayleighfordelingen som funksjon av turbulensnivået C_n^2 . For dette husker vi diskusjonen fra kapittel 3.3.2.4, der vi fant ut at en økning av de høyere momentene utover verdiene fra en Rayleighfordeling krever at den radielle fordelingen må modifiseres med et fjerdeordens polynom, slik at

$$\frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr \rightarrow \frac{r}{\sigma^2} \frac{1 + \alpha \frac{r^4}{4\sigma^4}}{1 + 2\alpha} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr.$$

Dette fører til nye forhold til momentene som er gitt (i første orden i α) ved

$$\frac{\sqrt[n]{\langle r^n \rangle}}{\langle r \rangle} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt[n]{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \left(1 + \frac{\alpha}{4}(n-1) + O(\alpha^2)\right).$$

Vi kan nå løse opp likningen for α og får

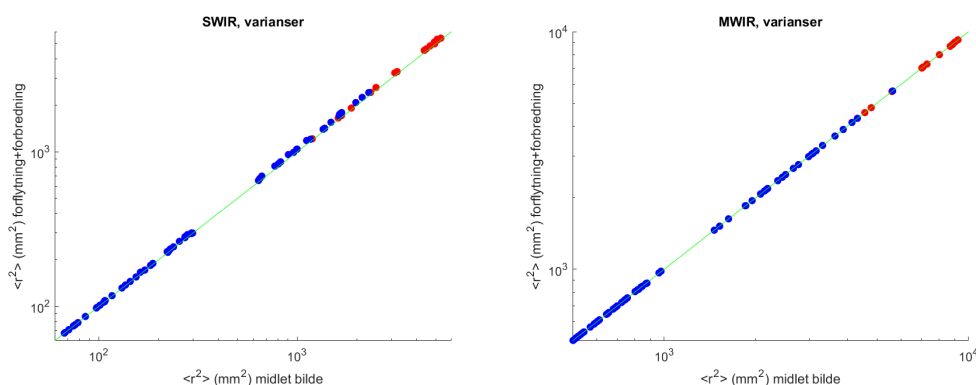
$$\alpha = \frac{4}{n-1} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\sqrt[n]{\langle r^n \rangle}}{\langle r \rangle} \left[\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \right]^{-1/n} - 1 \right\}.$$

For hver kjøring kan vi beregne tre verdier for α (en for hver av de høyere momentene med $n = 2 \dots 4$). Vi beregner så middelveidi til de tre verdiene og får et estimat for avvik fra en gaussisk stråle ved det tilsvarende turbulensnivået til kjøringen. Disse estimatene for α er gjengitt i figur 3.27 som funksjon av C_n^2 for begge bølgelengder.

Diskusjonen av verdiene i figur 3.27 er ikke så enkel, siden dataene er ganske støyende og man ser at man har nådd grensen for hva man fortsatt kan analysere med den datakvaliteten man har. Det man ser ganske bra er at avviket fra gaussisk fasong øker med økende turbulensnivå. Man ser også at de røde punktene ikke følger denne systematikken, og det er første gang i hele dataanalysen at de røde punktene (som tilsvarer kjøring der laserstrålen muligens er større enn bildet) skiller seg ut i de grader. Videre ser man at for $2 \mu\text{m}$ laserstrålen, så ligger noen av de blå punktene ved $C_n^2 > 10^{-13} \text{ m}^{-2/3}$ litt lavere enn en systematisk økning skulle tilsi. Her kan vi dessverre ikke utelukke at til tross for vårt beste forsøk med å avbilde hele laserstrålen, så har man egentlig aldri noe garanti at litt av intensiteten ligger utenfor bildet. Det blir spesielt et problem for de høyere momentene som er veldig følsomme for stråleintensitet som ligger langt vekk fra strålemidtpunkt. En annen observasjon er at for $1 \mu\text{m}$ laserstrålen så ligger bidraget α ved de laveste turbulensnivåene ved -10% , mens for $2 \mu\text{m}$ laserstrålen så ligger bidraget ved $+10\%$ ved tilsvarende turbulens. Det kunne man muligens tolke som en reell forskjell for de to bølgelengdene, men det kan også simpelthen tyde på noen systematiske usikkerheter for de to laserstrålene som gir utslag i forskjellig retning for α . For å avklare dette burde man sikkert gjennomføre nye og bedre målinger. Her skal vi minne om at et tilsynelatende negative bidrag fra et fjerdeordens ledd kunne også tolkes som et positivt bidrag fra et førsteordens ledd (se diskusjonen i vedlegg C). At tallet for $1 \mu\text{m}$ bølgelengde er negativt betyr derfor ikke at tallet er ufysikalsk, men at det kan være en artefakt av vår modellavhengig tolkning av dataene ved et fjerdeordens ledd.

4 Resultater

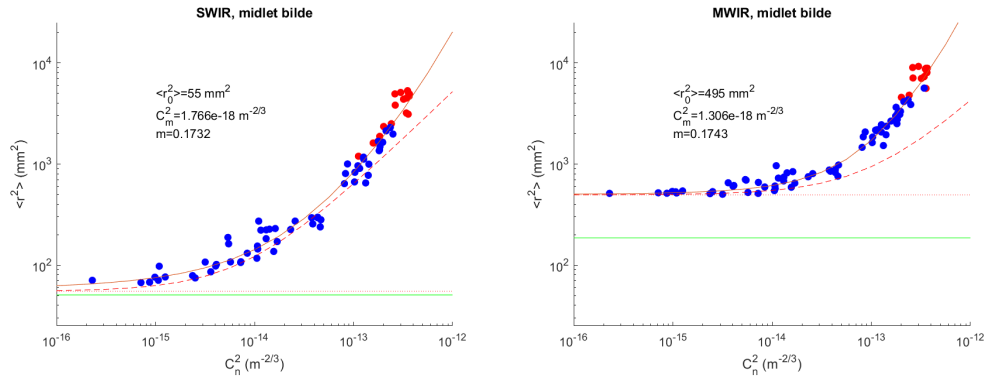
Vi kommer nå til å diskutere hvordan strålebredde til midlet bilde, strålebredde til enkeltbildene og midlet avstand for stråleforflytningen avhenger av turbulensnivået gitt ved strukturkonstanten C_n^2 (i $\text{m}^{-2/3}$). Selv om vi har i kapittel 3 produsert grafer til første moment $\langle r \rangle$ til radiell fordeling (i piksler) som funksjon av turbulensnivå, så finner vi det mer hensiktsmessig å diskutere grafer til andre moment $\langle r^2 \rangle$ (i mm^2). Vi har nemlig postulert i kapittel 3.4.3 at stråleforflytningen kan tolkes som sin egen stokastisk prosess, uavhengig av andre effekter for (korttids) stråleforbredning. Når man tenker på (langtids) stråleforbredning til midlet bilde som en sammensatt effekt av stråleforflytning og (korttids) stråleforbredning til enkeltbildene, der de to effektene er uavhengige fra hverandre, så burde middelverdiene og variansene til enkelteffektene summeres til middelverdi og varians til totaleffekt. Her kan det være fristende å tenke at det gjelder for de første momentene $\langle r \rangle$, men dette gjelder dessverre kun for de vektorkomponentene $\langle x \rangle$ og $\langle y \rangle$ (som alle er lik 0), men ikke absoluttverdien $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Heldigvis skal også variansene summeres, og siden $\langle r^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle$ får vi dermed at andre momentene til radiell fordeling til enkelteffektene skal summeres for å gi andre moment til totaleffekt. Figur 4.1 viser at det er tilfelle, som underbygger vår antakelse at stråleforflytning og (korttids) stråleforbredning kan tolkes som to uavhengige stokastiske prosesser.



Figur 4.1 Sammenlikning av andre moment til radiell fordeling til midlet bilde med summen av de andre momentene til stråleforflytning og stråleforbredning. Dataene fra SWIR kameraet er i venstre panel og de fra MWIR kameraet vises i høyre panel. Røde datapunkter indikerer kjøring der bildet kan være større enn skjermen. De grønne linjene er diagonaler og tilsvarende perfekt korrelasjon.

Vi fortsetter nå med å diskutere stråleforbredning til midlet bilde. Vi kaller dette også for langtids stråleforbredning, siden dette tilsvarer tilfellet der man peker laserstrålen i en retning og så måler man hvor bred laserstrålen blir over et lengre tidsrom (i vårt tilfelle 20 s) uten noe avbøtende tiltak. Resultatene er vist i figur 4.2. Ved forsvinnende turbulens ($C_n^2 \sim 10^{-16} \text{ m}^{-2/3}$) er antakelsen at strålen er tilnærmet uforstyrret. Hvis man måler strålebredden i fokus (eller hvis man fokuserer strålen på måleskjermen), så burde strålebredden W være begrenset kun ved diffraksjon. Her må vi først og fremst huske at andre moment og strålebredden er relatert ved

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{2} W^2.$$



Figur 4.2 Andre moment til radiell fordeling til midlet bilde som funksjon av turbulensnivået for SWIR kameraet (venstre panel) og MWIR kameraet (høyre panel). Røde datapunkter indikerer kjøringene der bildet kan være større enn skjermen. Den grønne linjen indikerer minimalstørrelsen kun begrenset av diffraksjon. De røde kurvene tilsvare forskjellige enkle tilpassninger (se tekst).

Strålebredden i seg selv er gitt ved

$$W(z) = W_0 \sqrt{\Theta_0^2(z) + \Lambda_0^2(z)},$$

der $\Theta_0(z) = 1 - \frac{z}{F_0}$ er krumningsparameteren og $\Lambda_0(z) = \frac{2z}{kW_0^2}$ er Fresnelforholdet (se del I av rapportserien). Her kan vi enten beregne diffraksjonsgrensen hvis vi setter $z = F_0$, der vi får $\langle r^2 \rangle = \frac{F_0^2 \lambda^2}{2\pi^2 W_0^2}$, eller vi kan løses opp for fasefrontkrumningen F_0 for en gitt strålestørrelse $\langle r_0^2 \rangle$ ved

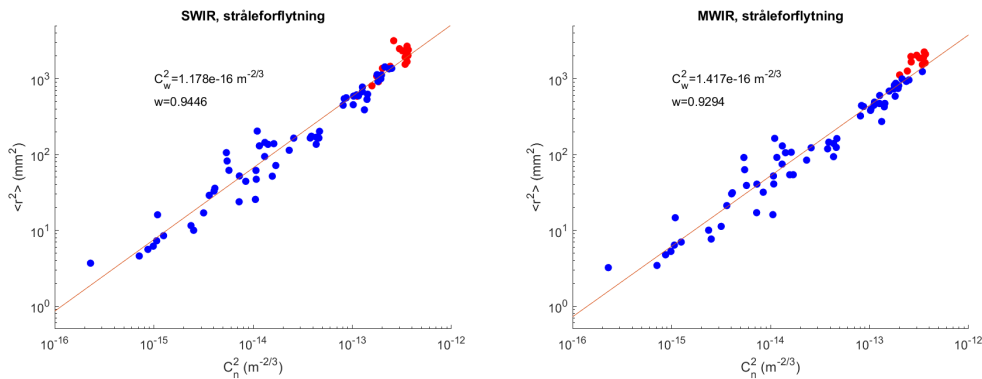
$$F_0 = \frac{\pi z W_0^2}{\pi W_0^2 \pm \sqrt{2\pi^2 \langle r_0^2 \rangle W_0^2 - \lambda^2 z^2}},$$

som samtidig gir avstand til fokus til laserstrålen.

Når vi ser på figur 4.2, så ser vi at spesielt 2 μm laserstrålen er mye større enn diffraksjonsgrensen, som tilsvare omtrent 185 mm^2 , men også 1 μm strålen er litt større enn de 51 mm^2 den skulle være ved korrekt fokusering. Vi estimerer at 1 μm strålen har en størrelse på 55 mm^2 og 2 μm strålen har en størrelse på 495 mm^2 på måleskjermen (i fravær av turbulens) og bruker disse verdiene i analysen fremover. Med disse tallene beregner vi aller først fasefrontkrumningen. For en stråle med startbredde $W_0 = 3,5$ cm stemmer nemlig den observerte strålebredden ved $z = 1,04$ km avstand overens med en fasefrontkrumningen F_0 på enten 0,96 km eller 1,14 km for 1,064 μm laserlyset og på enten 0,61 km eller 3,4 km for 2,036 μm laserlyset.

Ved siden av diffraksjonsgrensen, som er den grønne linjen i figur 4.2 har vi også satt inn en prikket rød linje som tilsvare den antatte strålestørrelsen i fravær av turbulens. Videre har vi satt inn en stiplede rød kurve som indikerer effekten til stråleforflytningen (som vi diskuterer i detalj lenger nede) og en heltrukket rød linje som er en tilpassning til dataene og som vi diskuterer i det følgende.

For tilpassningen har vi først produsert dobbeltlogaritmiske grafer av $\langle r^2 \rangle - \langle r_0^2 \rangle$ (i mm^2) som funksjon av C_n^2 , men det viste seg at slike grafer ikke produserer rette linjer. Tvert imot får man



Figur 4.3 Andre moment til radiell fordeling til stråleforflytningen som funksjon av turbulensnivået for SWIR kameraet (venstre panel) og MWIR kameraet (høyre panel). Røde datapunkter indikerer kjøring der bildet kan være større enn skjermen. Linjene tilsvare en enkel tilpassning (se tekst).

konvekse kurver, som betyr at avhengigheten ikke lar seg beskrive av noe enkel potenslov – avhengigheten er altså eksponensiell. I neste omgang produserte vi derfor dobbeltlogaritmiske grafer av $\ln(\langle r^2 \rangle - \langle r_0^2 \rangle)$ (gitt i mm²) som funksjon av C_n^2 og disse ga rette linjer som vi kunne tilpasse. Til sammen ble fitfunksjonen til strålebredden

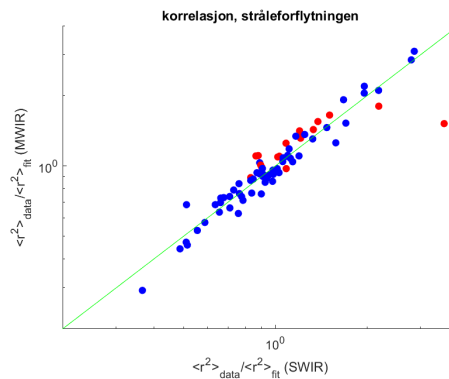
$$\langle r^2 \rangle = \langle r_0^2 \rangle + \exp \left[\left(\frac{C_n^2}{C_m^2} \right)^m \right],$$

der C_m^2 og eksponenten m ble tilpasset, mens $\langle r_0^2 \rangle$ var estimert fra før. Det er ganske betryggende at parameterne for begge laserstråler er ganske like. Det betyr vel at selv om dette er rent fenomenologiske verdier, så er det en mulighet at de kan tolkes i en fysikalsk sammenheng. Vi har heller ikke undersøkt på en systematisk måte hvordan parameterne avhenger av valget for $\langle r_0^2 \rangle$, men vi fant allerede ut at de ikke er helt uavhengige fra hverandre. Dette gjør selvfølgelig at en fysikalsk tolkning av parameterne muligens ikke blir altfor robust.

Det neste vi undersøker er stråleforflytningen. Vi skiller ut denne prosessen fra andre (korttids) effekter for stråleforbredning, siden det er en effekt som kan korrigeres for ved en tip-tilt mekanisme. Videre ser det ut som om stråleforflytningen er noe som skjer på en lengre tidsskala enn de andre prosessene. Det er jo nettopp derfor vi kaller de andre effektene for *korttids* stråleforbredning. Først når vi plusser effekten fra stråleforflytningen for vi den totale *langtids* stråleforbredningen. Figur 4.3 viser dataene fra SWIR og MWIR kameraene. Den røde linjen i grafene er en tilpassning. Siden grafen viser andre moment til stråleforflytningen (i mm²) som funksjon av turbulensnivået på en dobbeltlogaritmisk skala betyr det at fitfunksjonen tilsvare

$$\langle r^2 \rangle = \left(\frac{C_n^2}{C_w^2} \right)^w.$$

Også denne tilpassningen er rent fenomenologisk, men siden fitfunksjonen er så enkel blir det lett å tolke parameterne ved fysikalske størrelser. Det kommer i tillegg til at fitparameterne er ganske like for de to bølgelengdene, som betyr at tilpassningen trolig er ganske robust. Aller først ser vi



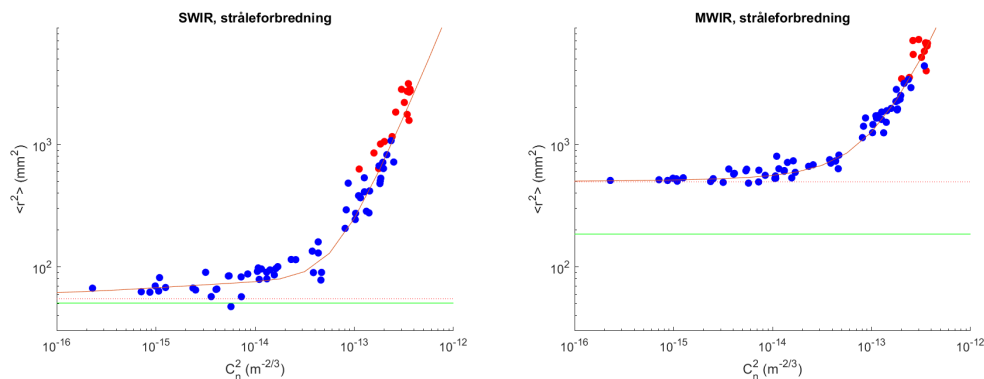
Figur 4.4 Avvik data fra fit. Røde datapunkter indikerer kjøringene der minst et av bildene kan være større enn skjermen. Linjen er diagonalen og tilsvarende perfekt korrelasjon.

at eksponenten ikke er langt fra 1, som betyr at sammenhengen mellom $\langle r^2 \rangle$ og C_n^2 er tilnærmet lineær, som diskutert i boka til Andrews og Phillips. Videre kan vi tolke C_w^2 som det turbulensnivået der andre moment til stråleforflytningen er lik 1 mm^2 , det vil si der stråleforflytningen begynner å bli merkbar.⁶ Siden denne parameteren er i størrelsesorden $10^{-16} \text{ m}^{-2/3}$ støtter dette vår tidligere antakelse om at uforstyrret strålebredde $\langle r_0^2 \rangle$ kan estimeres ved observert strålebredde ved dette turbulensnivået.

En annen sak som er iøynefallende er at avvikene til dataene fra tilpassningen virker veldig korrelert for de samme kjøringene (her gitt ved samme turbulensnivå). Dette har vi undersøkt videre ved å beregne en avviksfaktor $\langle r^2 \rangle_{\text{data}} / \langle r^2 \rangle_{\text{fit}}$ for alle datapunkter for så å plote disse faktorene fra $2 \mu\text{m}$ laserlys mot faktorene fra $1 \mu\text{m}$ laserlys for alle kjøringene i figur 4.4. Ikke bare ser vi at avvikene for begge bølgelengder er veldig bra korrelert med hverandre, men også at avvikene kan til dels bli ganske store – opptil en faktor 3. Dette tyder på at stråleforflytningen, på systematisk vis, erfarer andre turbulensnivåer enn de som er blitt målt på de tilsvarende tidspunktene ved bruk av en scintillometer. En mulig forklaring kunne vært at ved å måle stråleforflytning, så måler man et mer representativt eller *riktig* turbulensnivå. Men denne forklaringen slår allerede feil når man betrakter en annen, antatt ukorrelert størrelse som korttids stråleforbredning. Her ser vi ikke noe tilsvarende korrelasjon mellom avvikene (se figur 4.5 og til sammenlikning figur 4.3). Ikke desto mindre må det være en fysikalsk mekanisme bak disse korrelerte avvikene som vi burde kunne forstå.

En mulig forklaring kunne vært at måleperioden på 20 s ikke oppfyller kravet til ergodisitet. Hvis vi antar at stråleforflytningen drives av store virvler med varm eller kald luft langs strålen, så kan man tenke seg at for å få med seg et representativt utvalg av slike virvler, så behøver man rett og slett å bruke mer tid. Mindre virvler er det flere langs strålen og det er flere som beveger seg gjennom strålen i en gitt tid (ved en konstant vindhastighet). Derfor kan man muligens observere et representativt utvalg av slike mindre virvler i løpet av måleperioden og man oppnår tilnærmet ergodisitet for f.eks. korttids stråleforbredning (som drives stort sett av mindre virvler). Store virvler er det færre av, og de trenger også lengre tid til å bevege seg gjennom strålen. Kanskje man trenger å utvide måleperioden for å sample mange nok slike virvler for tilnærmet ergodisitet for langtidseffekter som stråleforflytning. Dette understøttes også av vår undersøkelse av frekvensinnholdet i tidsserien

⁶Også verdien til denne proporsjonalitetskonstanten er i samsvar med teorien diskutert i boka til Andrews og Phillips.



Figur 4.5 Andre moment til radiell fordeling til øyeblikksbildene som funksjon av turbulensnivået for SWIR kameraet (venstre panel) og MWIR kameraet (høyre panel). Røde datapunkter indikerer kjøring der bildet kan være større enn skjermen. Kurvene tilsvare kurvene fra figur 4.2 minus kurvene fra figur 4.3. Linjene indikerer minimalstørrelse til strålen i fravær av turbulens (grønn linje) kun begrenset av diffraksjon og faktisk størrelse (rød, prikket linje) som diskutert i sammenheng med figur 4.2.

til stråleforflytningen. Her så vi at selv for de laveste frekvensene (ned til 0,05 Hz), så fant vi lite antydning til at kurven flater ut (for ikke å snakke om at den minker). Ellers kunne frekvensinnholdet godt beskrives fra de laveste målte frekvenser opp til 3 Hz ved en $1/\sqrt{f}$ lov. Ved høyere frekvenser fra 3 Hz og oppover til de største målte frekvensene rundt 25 Hz fant vi at frekvensinnholdet tilsvarer mer en $1/f$ lov.

Som siste ledd i diskusjonen av resultatene skal vi se på (korttids) stråleforbredningen (figur 4.5). Dette tilsvarer altså strålestørrelsen man forventer hvis man kunne korrigere for stråleforflytningen ved en hurtigagerende tip-tilt mekanisme (med forbehold om at $2 \mu\text{m}$ strålen er i utgangspunkt mye bredere enn diffraksjonsgrensen tilsier). Figuren viser datapunktene som er basert på strålebredden til rundt 1000 enkeltbilder hver. Kurvene i figuren er ikke noe tilpassning til disse dataene. Kurvene er nemlig beregnet ved å trekke tilpassning til stråleforflytningen (se figur 4.3) fra tilpassning til midlet bilde (se figur 4.2). Det er slående hvor bra de beregnete kurvene beskriver dataene. Det har selvfølgelig sammenheng med at variansene er additive (se figur 4.1), men det er allikevel oppsiktsvekkende at de til dels små forskjellene mellom de heltrukket og stiplede kurvene i figur 4.2 beskriver den over store områder *ikke* dominerende effekten av korttids stråleforbredning så bra.

Det er ikke så mye mer å si om korttids stråleforbredning bortsett fra at vi fant ut at denne forbredningen fører til en ikke-gaussisk stråleprofil. Størrelsen til avviket fra gaussisk stråleprofil korrelerer godt med turbulensnivået og avviket synes helt tydelig i de høyere momentene til den radielle fordelingen av stråleintensiteten. Vi har prøvd å modellere de avvikende momentene ved å gange den forventete radielle intensitetsfordelingen med et fjerdegradspolynom. Det er selvsagt ikke den eneste muligheten å beskrive momentene, men kanskje den enkleste. Analysen fører oss til grensen for hva som er mulig å få ut av dataene og her er det åpenbart gode muligheter for videre undersøkelser av et uventet fenomen med nye og bedre eksperimenter.

5 Konklusjoner og utsyn

Ved siden av resultatene som er beskrevet i kapittel 4 kan vi også trekke en rekke konklusjoner relatert til selve eksperimentet og gi anbefalinger for eventuelle videre feltforsøk. De første anmerkningene gjelder utstyret, deriblant kameraene. Vi begynner med SWIR kameraet. Her har vi opplevd at total piksleverdi til bakgrunnsbildene (eller bakgrunnsintensitet) viser en periodisitet med 1 s. Videre er fluktuasjoner til bakgrunnsintensiteten til høyre og venstre bildekant korrelert med hverandre. I tillegg ser vi at kameraet har problemer med å ta eller lagre bilder med den frekvensen (100 Hz) som vi ønsker i dette forsøket. Dette gjør at den alternerende rekken av bilder med og uten laserlys blir brutt gjentatte ganger per kjøring. Det kan derfor være lurt å bruke et annet kamera av høyere kvalitet som ikke har disse problemene i et nytt feltforsøk. Når det gjelder MWIR kameraet, så har vi oppdaget at bakgrunnsintensiteten ofte øker i løpet av en kjøring til det når en topp ved rundt 2 s inn i kjøringen for så å avta igjen. Det i seg selv er ikke noe stort problem, men vi ser også at bakgrunnsintensiteten gjør enkelte uforklarlige hopp (opp eller ned) i løpet av kjøringene. Videre har vi oppdaget at selv for de bakgrunnsuttrekkene, så forsvinner bakgrunnen ikke og vi er nødt å subtrahere en liten offsetverdi til og med fra de bakgrunnsuttrekkene. Til slutt ser vi noen tilfeller (for begge kameraene) der bakgrunnsintensiteten er betydelig større enn for bakgrunnsbildene før og etter, det vil si at vi oppdager uforklarlige spisser i bakgrunnsintensiteten. Det er kan derfor være en ide å prøve å forstå hvorfor kameraene oppfører seg som de gjør for så å kunne minimere slike problemer.

Det neste store problemet er synkroniseringen av kameraene med hverandre og med laserpulsene. Her viser det seg at selv etter de aller største problemene var løst (slikt at vi kunne begynne med målingene), så oppstod det fortsatt feil i synkroniseringen i det første sekundet (for begge kameraene) i rundt 10% av kjøringene. Videre viste det seg at den totale registrerte pikselverdien (intensiteten) til 1 μm laserstrålen ikke hadde noen form for korrelasjon med integreringstiden til SWIR kameraet. Vi vet egentlig ikke hvorfor det er slikt men det er nærliggende å tenke på at også her spiller synkroniseringen en rolle (ved for eksempel at integrasjonstiden til kameraet strekker seg utover lengden til laserpulsen). Det aller største problemet med synkroniseringen derimot var at vi ikke greide å korrelere bildene fra de to kameraene med hverandre i tid. Her var tanken at bildenummer skulle være tilstrekkelig, men siden SWIR kameraet ikke holdt følge med MWIR kameraet, så lot det seg ikke gjøre. Det betyr selvfølgelig at neste gang, så er det et absolutt krav at hvert bildet lagres med tidsstempel med ms presisjon.

Det tredje store problemet gjelder strålekvaliteten generelt. Vi har sett at spesielt 1 μm strålen hadde en elliptisk stråleprofil for lange perioder gjennom eksperimentet. I begynnelsen, så ble det ikke oppdaget siden turbulensnivået var så høyt at fasongen ble utsmurt på grunn av strålevandring. Når problemet ble oppdaget mot slutten av feltforsøket så prøvde vi å refokussere strålen. Det førte til at fasongen til 1 μm strålen ble mer sirkulær, men fasongen til 2 μm strålen gikk fra sirkulær til elliptisk, med den store halvaksen nesten perpendikulær til tilsvarende fra 1 μm stråleprofilen. Vi kun flyttet problemet fra den ene strålen til den andre. For neste gang burde vi ha en bedre forståelse for hvordan å rette opp en laserstråle uten å påvirke den andre i negativ retning. I tillegg kommer at 2 μm strålen var mye bredere enn den skulle vært hvis dens bredde var begrenset kun av diffraksjon. Det betyr at fasefrontkrumningen til 2 μm laserstrålen var feil og vi må forbedre muligheten til å kunne forandre fasefrontkrumningen til ønsket verdi.

Når det gjelder tidsrekker, så kunne det vært ønskelig å se på lengre kjøringene over 20 s slik at

vi kan være sikre på at tidsmiddel fra en kjøring tilsvarende et representativt utvalg av realiseringer av turbulensen. Videre så kunne det være ønskelig å ta noen kjøring med kjappere følge av bilder, slikt at man ser for hvor korte tidsintervaller turbulensen kan anses som frossen (gjærne i avhengighet av vindhastigheten). Videre er det ønskelig med flere kjøring. Det viste seg nemlig at fouriertransformerte av tidsrekkene er så støyete at vi trengte å midle alle disse (uansett turbulensnivå) for å kunne analysere dem. Hvis man ønsker å analysere fouriertransformerte som funksjon av turbulensnivået så må vi ha flere eller lengre tidsrekker per turbulensnivå for å kunne lage meningsfulle fouriertransformerte.

Det som fungerte best av alt og ga de beste resultatene var analysen av stråleforflytningen innenfor en kjøring. Her fant vi at andre moment til stråleforflytningen er proporsjonalt til turbulensnivået med en proporsjonalitetskonstant i samsvar med gjeldende teorier. Videre fant vi at stråleforflytning og korttids stråleforbredning kan tolkes som to statistisk uavhengige prosesser som begge bidrar til langtids stråleforbredning.

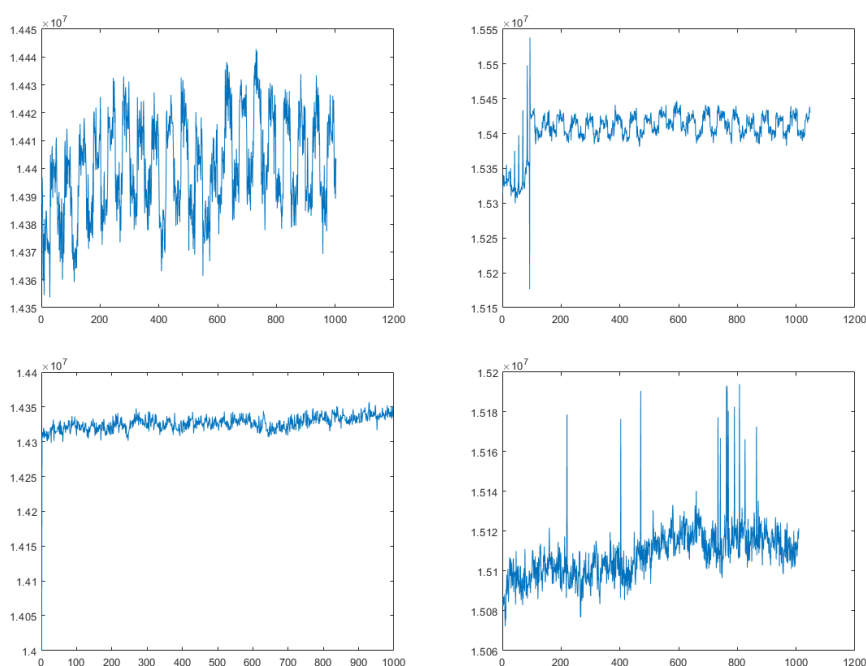
Det man derimot kunne forbedre er å se på vinklingen av laserstrålen mellom kjøringene som er avhengig av temperaturgradienten langs testbanen. Vi har målinger av temperaturgradienten ved FOIs målestasjon, men vi har ikke målt størrelsen til vinkelkorrektoren til laserstrålen for hver kjøring. Det betyr at vi ikke kan korrelere temperaturgradienten med vinklingen.

En siste ting man kunne forbedre er å bruke en litt større skjerm. Når turbulensnivået blir høyt, så blir midlet stråle så stor at deler av den faller utenfor skjermen vi brukte. Dermed blir momentene og spesielt de høyere momentene påvirket i negativ retning. For å få gode eksperimentelle verdier ved høy turbulens er det derfor avgjørende å fange opp hele strålen gjennom hele kjøringen på en større skjerm.

Ved å rette opp alle (eller de viktigste) av disse problemene er vi sikre på at et nytt feltforsøk kan gi oss videre verdifulle data for å kunne karakterisere propagasjon av laserstråling gjennom turbulent atmosfære på en enda bedre måte i fremtiden.

A Bakgrunnssubtraksjon

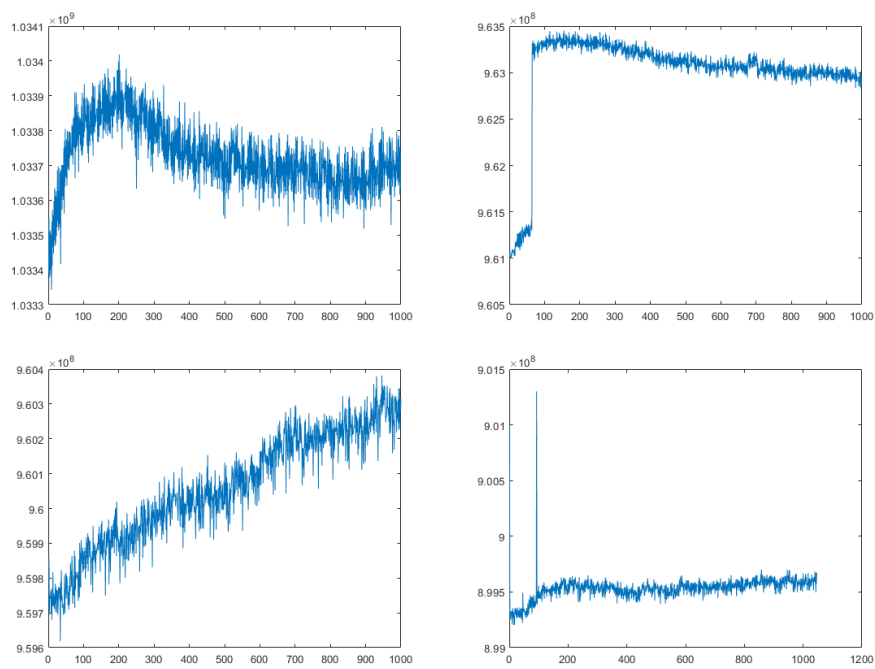
Det er en del uventede observasjoner når det gjelder bakgrunnsbilder som vi ønsker å dokumentere her. I alle de følgende bildene viser vi total pikselverdi per bakgrunnsbilde for alle bakgrunnsbilder i en kjøring. I tilfelle SWIR kamera (se figur A.1) ser man i de fleste tilfellene at total pikselverdi har en periodisitet tilsvarende 1 sekund (panelet øverst til venstre). Panelet øverst til høyre viser en kjøring med manglende synkronisering det første sekundet. Nederst til venstre er en av de få kjøringene uten periodisitet, og nederst til høyre er en kjøring med kun svak periodisitet, men med en del signifikante topper.



Figur A.1 Total pikselverdi til bakgrunnsbilder til SWIR kameraet (fra venstre til høyre) for kjøringene 07 og 20 (øverst) og kjøringene 75 og 08 (nederst).

Det kan være fristende å forklare periodisiteten ved et problem med synkroniseringen (som jo oppdateres hvert sekund), men på den andre siden så ser man ikke den samme periodisiteten i bakgrunnsnivået til MWIR kameraet, som jo synkroniseres på akkurat lik måte.

I tilfelle MWIR kamera (se figur A.2) har man i de fleste tilfellene en bred topp etter omtrent 2 sekunder (panelet øverst til venstre). I tillegg til denne trenden finner man også tilfeller der bakgrunnsnivået har et plutselig hopp enten oppover (panelet øverst til høyre) eller nedover (ikke vist her). Nederst til venstre er en av de ytterst få kjøringene der bakgrunnsnivået stiger bestandig, mens nederst til høyre er et eksempel med en signifikant topp.



Figur A.2 Total pikselverdi til bakgrunnsbilder til MWIR kameraet (fra venstre til høyre) for kjøringene 10 og 17 (øverst) og kjøringene 37 og 55 (nederst).

B Stråleforflytning

I det opprinnelige regnestykket i kapittel 3.3.2.2 har vi forutsatt at strålen blir sendt ut helt vannrett. Denne forutsetningen er ikke lenger sann når vi begynner å vinkle strålen for å kompensere for temperaturgradienter og dermed for gradienter til brytningsindeksen. For det mer generelle problemet må vi igjen løse differensiallikningen

$$Cn(y) = \sqrt{1 + y'^2},$$

men den gangen med randbetingelsene $y(z = 0) = 0$ og $y'(z = 0) = y'_0$. Igjen antar vi en linear variasjon av brytningsindeksen med høyden y , det vil si vi har $n(y) = n_0(1 + n_y y)$, og dermed forenkler differensiallikningen seg til

$$1 + n_y y = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{1 + y_0'^2}}.$$

Løsningen til denne differensiallikningen er gitt ved

$$y = \frac{1}{n_y} \left[\cosh \left(n_y \sqrt{1 + y_0'^2} z \right) + \frac{y'_0}{\sqrt{1 + y_0'^2}} \sinh \left(n_y \sqrt{1 + y_0'^2} z \right) - 1 \right],$$

som lett lar seg etterprøve ved å sette inn de tilsvarende uttrykkene for y og y' i differensiallikningen. Vi utvikler uttrykket i hakeparentesene opp til laveste, ikke-forsvinnende orden i n_y og y'_0 og får det sterkt forenklete uttrykket

$$y \approx \frac{1}{2} n_y z^2 + y'_0 z.$$

Igjen tar vi utgangspunkt i en vannrett stråle i fravær av noen gradient. Hvis en gradient skulle opptre, og man ønsker å kompensere dens effekt for en gitt detektoravstand z_0 , så må man altså vinkle strålen med

$$y'_0 = -\frac{n_y z_0}{2}$$

i forhold til horisontalen. Størrelsen y'_0 er i så fall gitt i radianer.

Det er nå litt morsomt å se på bunnpunktet til strålen som ligger ved $z = \frac{z_0}{2}$. Med den gitte y'_0 får vi nemlig $y_{\text{bunn}} = -\frac{1}{8} n_y z_0^2$. På den andre siden, hvis man tenker på krumningen til jordoverflaten, så ligger bakken ved bunnpunktet $y_{\text{topp}} = \frac{z_0^2}{4R}$ "høyere", det vil si nærmere den direkte siktelinjen enn ved endepunktene (R er jordens radius). Tilsammen må altså laseren og detektoren være mer enn $\Delta y = \frac{1}{4} \left(\frac{n_y}{2} + \frac{1}{R} \right) z_0^2$ over bakken for at strålen ikke skal treffe (en antatt sfærisk) jordoverflate ved bunnpunktet. Det viser seg at begge bidragene blir omtrent like store for en (ikke uvanlig stor) temperaturgradient rundt 0,3 K/m.

C Generaliseringer til Rayleighfordelingen

For å kunne beskrive avvik av momentene fra momentene til Rayleighfordelingen skal vi diskutere forskjellige generaliseringer til Rayleighfordelingen. En ren fenomenologisk modifikasjon til fordelingsfunksjonen inkluderer et (lite) lineært ledd tilsvarende

$$\frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr \rightarrow \frac{r}{\sigma^2} \left(1 + \alpha \frac{r}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr,$$

der vi også trenger å dele fordelingsfunksjonen med $1 + \alpha \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ for å normere den. Momentene til denne fordelingen beregnes på vanlig måte og vi får

$$\langle r^n \rangle = (2\sigma^2)^{n/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) + \alpha \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{3}{2}\right)}{1 + \alpha \frac{\sqrt{\pi}}{2}}.$$

Hvis vi nå relaterer $\sqrt[n]{\langle r^n \rangle}$ med $\langle r \rangle$, som vi har gjort i figur 3.14, så får vi

$$\frac{\sqrt[n]{\langle r^n \rangle}}{\langle r \rangle} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1 + \alpha \frac{\sqrt{\pi}}{2}}{1 + \alpha \frac{2}{\sqrt{\pi}}} \sqrt[n]{\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) + \alpha \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{3}{2}\right)}{1 + \alpha \frac{\sqrt{\pi}}{2}}}.$$

Her kan vi utvikle høyre side for små verdier av α og får i første orden

$$\frac{\sqrt[n]{\langle r^n \rangle}}{\langle r \rangle} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt[n]{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \left(1 + \alpha \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 - \frac{4}{\pi} + \frac{1}{n} \left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} - 1\right\}\right] + \mathcal{O}(\alpha^2)\right).$$

Det som er litt kjedelig er at alle første ordens korrekturen (altså alle tall i hakeparentesene) er negative for alle høyere ordens momenter. Det betyr at hvis man hadde trukket linjer i figur 3.14 basert på denne korrekturen, så hadde man beveget seg enda lenger vekk fra datapunktene! Derfor slår denne fenomenologiske modifikasjonen feil.

For en muligens mer relevant generalisering av Rayleighfordelingen går vi tilbake til normalfordelingene i x og y retningene fra kapittel 3.3.1. Siden disse fordelingene er symmetriske, så må den laveste mulige korrekturen også være symmetrisk og vi modifiserer normalfordelingene med et (lite) kvadratisk ledd tilsvarende

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \rightarrow \frac{1 + \alpha \frac{x^2}{2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \frac{1 + \alpha \frac{y^2}{2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy,$$

der vi i tillegg må dele fordelingen med $(1 + \frac{\alpha}{2})^2$ for å normere den. Når vi transformerer fordelingen til planare polarkoordinater får vi

$$I(r, \phi) dr d\phi = \frac{(1 + \alpha \frac{r^2 \cos^2 \phi}{2\sigma^2})(1 + \alpha \frac{r^2 \sin^2 \phi}{2\sigma^2})}{2\pi\sigma^2 (1 + \frac{\alpha}{2})^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r dr d\phi.$$

Når vi neglisjerer både i telleren og i nevneren alle kvadratiske ledd i α , får vi en uniform vinkelavhengighet

$$I(r, \phi) dr d\phi = \frac{1 + \alpha \frac{r^2}{2\sigma^2}}{2\pi\sigma^2(1 + \alpha)} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r dr d\phi,$$

som vi kan integrere over og får den radielle fordelingen

$$I(r) dr = \frac{r}{\sigma^2} \frac{1 + \alpha \frac{r^2}{2\sigma^2}}{1 + \alpha} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr.$$

Her ser vi også at denne modifikasjonen ligner veldig på den forrige, bortsett fra at modifikasjonen består av et (lite) kvadratisk ledd i r istedenfor et lineært ledd.

Momentene til denne fordelingen beregnes som vanlig og vi får

$$\langle r^n \rangle = (2\sigma^2)^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \frac{1 + \alpha \left(\frac{n}{2} + 1\right)}{1 + \alpha}.$$

Nå relaterer vi igjen $\sqrt[n]{\langle r^n \rangle}$ med $\langle r \rangle$, og vi får

$$\frac{\sqrt[n]{\langle r^n \rangle}}{\langle r \rangle} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1 + \alpha}{1 + \frac{3}{2}\alpha} \sqrt[n]{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \frac{1 + \alpha \left(\frac{n}{2} + 1\right)}{1 + \alpha}}.$$

Hvis vi nå utvikler høyre side for små verdier av α så finner vi at

$$\frac{\sqrt[n]{\langle r^n \rangle}}{\langle r \rangle} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt[n]{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \left(1 + \mathcal{O}(\alpha^2)\right),$$

det vil si at første ordens korrekturane i α for alle høyere momenter forsvinner! Med andre ord, metoden vår som sammenligner første moment med høyere momenter for å karakterisere radialfordelingen er ikke særlig følsom for modifikasjoner til Rayleighfordelingen av typen $1 + \alpha \frac{r^2}{2\sigma^2}$. Det betyr samtidig at vi fremdeles ikke kan forklare observasjonene i figur 3.14.

Før vi returnerer til hovedteksten, der vi diskuterer modifikasjoner av enda høyere orden til Rayleighfordelingen skal vi først undersøke en helt annen type modifikasjon basert på forskjell i bredde til normalfordelingene i x og y retningene. Utgangspunktet er altså

$$I(x, y) dx dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} dy.$$

Vi transformerer igjen til planare polarkoordinater og får

$$I(r, \phi) dr d\phi = \frac{r}{\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2}} e^{-\frac{r^2}{4} \left(\frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{\sigma_y^2}\right)} \left[\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2 \cos(2\phi)}{4} \left(\frac{1}{\sigma_x^2} - \frac{1}{\sigma_y^2}\right)} d\phi \right] dr.$$

Her får vi også en ikke-uniform vinkelavhengighet, som burde gi utslag i momentene til denne fordelingen. For at en analyse av momentene blir mest følsom burde man derimot også finne ut

langs hvilken retning intensitetsprofilen til laserstrålen er mest (eller minst) elongert. Dette har vi ikke gjort og alle momenter til vinkelfordelingen er beregnet relativ til x retningen som tilsvarer $\phi = 0$ i vår geometri. Vi neglisjerer derfor effekten til denne modifikasjonen på vinkelfordelingen og simpelthen integrerer over den for å få den modifiserte radielle fordelingen

$$I(r)dr = \frac{r}{\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2}} I_0 \left(-\frac{r^2}{4} \left[\frac{1}{\sigma_x^2} - \frac{1}{\sigma_y^2} \right] \right) e^{-\frac{r^2}{4} \left(\frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{\sigma_y^2} \right)} dr,$$

der modifikasjonen relativ til Rayleighfordelingen består hovedsakelig i en ny faktor gitt ved en modifisert Besselfunksjon av første type (og nullte orden) I_0 .

Momentene til denne fordelingen beregnes igjen på vanlig måte og vi får

$$\langle r^n \rangle = \left(2\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2} \right)^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) P_{\frac{n}{2}} \left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2}} \right),$$

der P_λ er λ -ordens Legendrefunksjonen (som er lik λ -gradens Legendrepolyomet for heltallige λ). Vi relaterer igjen $\sqrt[n]{\langle r^n \rangle}$ med $\langle r \rangle$, og får

$$\frac{\sqrt[n]{\langle r^n \rangle}}{\langle r \rangle} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[P_{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2}} \right) \right]^{-1} \sqrt[n]{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) P_{\frac{n}{2}} \left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2}} \right)}.$$

Dette resultatet kan vi forenkle videre ved å sette strålebreddene i de to retningene i forhold til hverandre ved $\sigma_x = \beta\sigma_y$. Med dette blir argumentene til Legendrefunksjonene $\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2}} = \frac{\beta^2 + 1}{2\beta}$, det vil si uavhengig av selve breddene og kun en funksjon av forholdet. Hvis vi nå utvikler uttrykket på høyre siden til laveste (altså andre) orden i $(\beta - 1)$ får vi

$$\frac{\sqrt[n]{\langle r^n \rangle}}{\langle r \rangle} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt[n]{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \left(1 + \frac{(\beta - 1)^2}{16\beta} (n - 1) + \mathcal{O}\left((\beta - 1)^4\right) \right),$$

som betyr at vi får positive korrekturene for alle høyere ordens momenter. Dessverre er korrekturene så små at for å kunne forklare en 3% økning i helningen til linjene i figur 3.14, så krever det $\beta \approx 2$, altså en stråle som er dobbel så bred i en retning som i den andre. En slik fasong kan derimot utelukkes ved en enkel visuell inspeksjon av strålebildene, og dermed kan observasjonene fra figur 3.14 ikke forklares med noen av modellene som vi har presentert her.

D Tolkning av autokorrelasjonsfunksjonen

Vi tar utgangspunkt i en stasjonær, reell prosess $x(t)$ med forsvinnende middelerverdi der dens fouriertransformerte

$$\xi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int x(t)e^{-i\omega t} dt$$

eksisterer. Autokorrelasjonsfunksjonen til prosessen er gitt ved

$$R(\tau) = \int x(t_1)x(t_1 + \tau)dt_1.$$

Fouriertransformerte til autokorrelasjonsfunksjonen er gitt ved

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int R(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint x(t_1)x(t_1 + \tau)e^{-i\omega\tau} dt_1 d\tau. \end{aligned}$$

Ved hjelp av substitusjonen $t_2 = t_1 + \tau$ kan vi skrive dobbeltintegralet som et produkt av to enkle integraler

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\omega) &= \iint x(t_1)e^{+i\omega t_1}x(t_2)e^{-i\omega t_2} dt_1 dt_2 \\ &= \sqrt{2\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int x(t_1)e^{-i\omega t_1} dt_1 \right]^* \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int x(t_2)e^{-i\omega t_2} dt_2 \right], \end{aligned}$$

som hver for seg er en fouriertransformert til den stokastiske prosessen $x(t)$, og dermed får vi

$$\mathcal{R}(\omega) = \sqrt{2\pi}\xi^*(\omega)\xi(\omega) = \sqrt{2\pi}|\xi(\omega)|^2.$$

Med dette resultatet kan vi relatere den fouriertransformerte stokastiske prosessen med den fouriertransformerte autokorrelasjonsfunksjonen. Hvis vi for eksempel antar at den stokastiske prosessen har en maksimalfrekvens ω_0 og opp til denne frekvensen følger en enkel potenslov av typen

$$\xi(\omega) = \xi_0 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^\nu \quad 0 \leq \omega \leq \omega_0$$

så er den fouriertransformerte autokorrelasjonsfunksjonen gitt ved

$$\mathcal{R}(\omega) = \sqrt{2\pi}\xi_0^2 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2\nu} \quad 0 \leq \omega \leq \omega_0$$

Dermed kan vi finne selve autokorrelasjonsfunksjonen ved tilbaketransformasjonen⁷

$$R(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\omega_0} 2 \cos(\omega\tau)\mathcal{R}(\omega)d\omega.$$

⁷For enkelhets skyld bruker vi den reelle tilbaketransformasjonen så lenge vi har definert $\xi(\omega)$ kun for positive ω . En symmetrisk $\xi(\omega)$ sammen med en tilbaketransformasjon ved det komplekse $e^{i\omega\tau}$ fører til nøyaktig det samme uttrykket.

Vi får altså

$$R(\tau) = 2\xi_0^2 \int_0^{\omega_0} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2\nu} \cos(\omega\tau) d\omega$$

eller med substitusjonen $x = 1 - \frac{\omega}{\omega_0}$

$$R(\tau) = 2\omega_0\xi_0^2 \int_0^1 x^{2\nu} \cos[\omega_0\tau(1-x)] dx.$$

Dette integralet kan løses generelt, men vi kommer til å være interessert kun i små verdier av τ , derfor utvikler vi cosinusfunksjonen opp til andre orden i τ og får

$$R(\tau) = 2\omega_0\xi_0^2 \int_0^1 x^{2\nu} \left[1 - \frac{1}{2}\omega_0^2\tau^2(x-1)^2\right] dx + \mathcal{O}(\tau^4).$$

Dette integralet evalueres til

$$R(\tau) = 2\omega_0\xi_0^2 \left[\frac{1}{2\nu+1} - \frac{\omega_0^2\tau^2}{(2\nu+1)(2\nu+2)(2\nu+3)} \right] + \mathcal{O}(\tau^4).$$

For en normert autokorrelasjonsfunksjon gjelder $R(0) = 1$ og dermed $\frac{2\omega_0\xi_0^2}{2\nu+1} = 1$. Det betyr videre at andrederiverte til R ved $\tau = 0$ blir

$$R''(\tau = 0) = -\frac{2\omega_0^2}{(2\nu+2)(2\nu+3)},$$

og dermed kan grensefrekvensen ω_0 (i rammen av modellen for $\xi(\omega)$ som vi har diskutert her) ekstraheres ut av krumningen til autokorrelasjonsfunksjonen ved $\tau = 0$. For dette må man i tillegg finne graden ν , som igjen kan leses av $\xi(\omega)$ altså den fouriertransformerte stokastiske prosessen.

I prinsippet kan man ekstrahere grensefrekvenser ω_0 som ligger en god del over Nyquistfrekvensen gitt ved $f = \frac{1}{2\Delta t}$, som for vårt tilfelle er $f \leq 25$ Hz (siden vi tar bilder med 20 ms mellomrom). Grunnen for at det er mulig er at vi forutsetter en spesiell fasong til den fouriertransformerte stokastiske prosessen, som vi ikke kan være sikker på tilsvarende realiteten. Spesielt kjenner vi ikke forløpet til $\xi(\omega)$ for frekvenser større en Nyquistfrekvensen. Vi har heller ikke god kunnskap om frekvensinnholdet ved veldig lave frekvenser siden observasjonsperioden er typisk kun 20 s og den stokastiske prosessen $x(t)$ er gitt ved avvik fra middelvei over denne perioden. Analysen hviler derfor på antakelsen at forløpet over *hele* frekvensområdet er som i modellen, mens vi kan ekstrahere ν kun fra det frekvensbåndet som er tilgjengelig ved observasjon. Dette introduserer en signifikant systematisk usikkerhet i analysen.

Om FFI

Forsvarets forskningsinstitutt ble etablert 11. april 1946. Instituttet er organisert som et forvaltningsorgan med særskilte fullmakter underlagt Forsvarsdepartementet.

FFIs formål

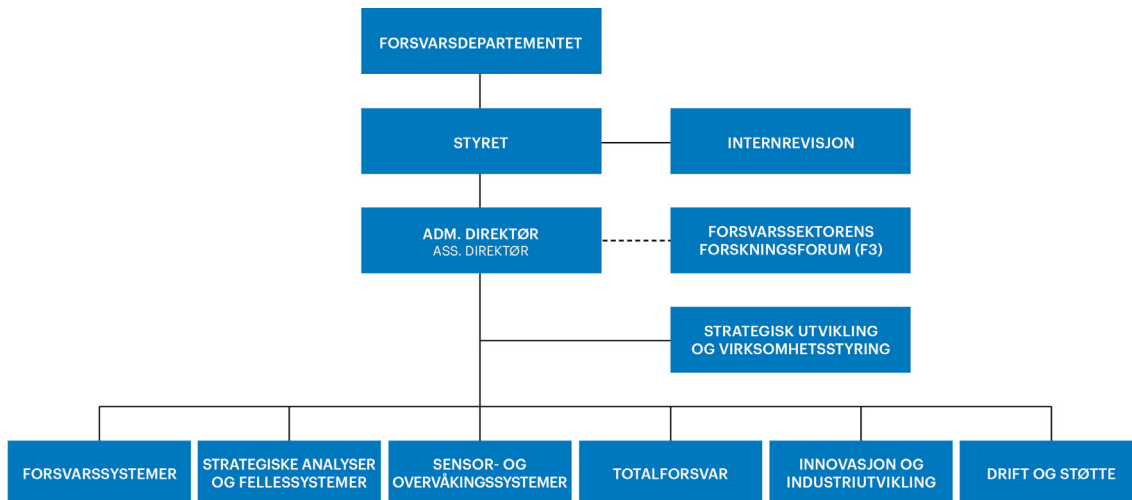
Forsvarets forskningsinstitutt er Forsvarets sentrale forskningsinstitusjon og har som formål å drive forskning og utvikling for Forsvarets behov. Videre er FFI rådgiver overfor Forsvarets strategiske ledelse. Spesielt skal instituttet følge opp trekk ved vitenskapelig og militærteknisk utvikling som kan påvirke forutsetningene for sikkerhetspolitikken eller forsvarsplanleggingen.

FFIs visjon

FFI gjør kunnskap og ideer til et effektivt forsvar.

FFIs verdier

Skapende, drivende, vidsynt og ansvarlig.



Forsvarets forskningsinstitutt (FFI)
Postboks 25
2027 Kjeller

Besøksadresse:
Kjeller: Instituttveien 20, Kjeller
Horten: Nedre vei 16, Karljohansvern, Horten

Telefon: 91 50 30 03
E-post: post@ffi.no
ffi.no

Norwegian Defence Research Establishment (FFI)
PO box 25
NO-2027 Kjeller
NORWAY

Visitor address:
Kjeller: Instituttveien 20, Kjeller
Horten: Nedre vei 16, Karljohansvern, Horten

Telephone: +47 91 50 30 03
E-mail: post@ffi.no
ffi.no/en