



FFI Forsvarets
forskningsinstitutt

24/00115

FFI-RAPPORT

Oppvarming ved laserstråling

– første forsøk med enkle konstruksjonsmaterialer

Andreas Schiller

Lars Grønmark Holmen

Oppvarming ved laserstråling

– første forsøk med enkle konstruksjonsmaterialer

Andreas Schiller
Lars Grønmark Holmen

Emneord

Laserstråler
Partielle differensialligninger
Skadevirkninger
Varme
Strålingsskader
Laservåpen

FFI-rapport

24/00115

Prosjektnummer

1602

Engelsk tittel

Heating by laser irradiation
– first trials with simple construction materials

Elektronisk ISBN

978-82-464-3521-3

Godkjennerne

Halvor Bjordal, *forskningsleder*
Halvor Ajer, *forskningssjef*

Dokumentet er elektronisk godkjent og har derfor ikke håndskreven signatur.

Opphavsrett

© Forsvarets forskningsinstitutt (FFI). Publikasjonen kan siteres fritt med kildehenvisning.

Sammendrag

Prosjektet «Laservåpen og beskyttelse» innenfor forskningsprogrammet «Luftvern, ubemannede luftsystemer og laser» går ut på å utvikle høyeffektlasere som mottiltak mot innkommende prosjektiler, droner og liknende. Denne rapporten diskuterer oppvarming av typiske konstruksjonsmaterialer for forsvarsindustrien ved laserstråling. Rapporten beskriver også laserskadelaboratoriet på FFI og resultater derfra.

Målingene blir sammenliknet med simuleringer basert på teorien om varmeledning. Denne teoretiske modellen er beskrevet i detalj, inkludert dens numeriske implementering. Samsvaret mellom modellert og målt temperaturøkning stemmer godt overens for de fleste undersøkte materialene hvis vi ser bort fra de målte verdiene for reflektans ved lav effekt og romtemperatur. Denne parameteren må justeres kraftig for å få godt samsvar mellom teori og eksperiment ved høy effekt og under oppvarming – sannsynligvis fordi belegget på materialene brenner opp fort og reflektansen dermed forandrer seg kraftig under forsøket.

Kunnskapen fra slike forsøk skal brukes videre i arbeidet med laservåpen på flere måter. På den ene siden er det viktig å forstå hvordan mulige militære mål kan skades med et laservåpen, og på den andre siden kan det være interessant å vite hvordan for eksempel missiler kan beskyttes mot laservåpen ved å bruke egnede konstruksjonsmaterialer eller belegg.

Summary

The project “Laser weapons and protection” within the research program “Air defense, unmanned air systems and lasers” aims to develop high-power lasers as countermeasures against incoming projectiles, drones and the like. This report discusses the heating of typical construction materials for the defense industry by laser radiation. The report also describes the laser damage laboratory at FFI and results from there.

The measurements are compared to simulations based on the theory of heat conduction. This theoretical model is described in detail, including its numerical implementation. There is a strong correspondence between modeled and measured temperature increase for most of the materials examined if one disregards the measured values for reflectance at low power and room temperature. This parameter must be heavily adjusted to get a good match between theory and experiment at high power and during heating – probably because the coating on the materials burns up quickly and the reflectance thus changes considerably during the experiment.

The knowledge from such experiments will be used further in work with laser weapons in several ways. On one hand, it is important to understand how possible military targets can be damaged by a laser weapon, and on the other hand, it can be interesting to know for example how missiles can be protected against laser weapons by using suitable construction materials or coatings.

Innhold

Sammendrag	3
Summary	4
1 Innledning	7
2 Teori	9
2.1 Systemdefinisjon	9
2.2 Greensfunksjonen til problemet	11
2.3 Løsningen til problemet	14
2.3.1 Det radielle integralet	15
2.3.2 Det longitudinale integralet	16
2.3.3 Tidsintegralet	18
2.4 Numerisk implementering	19
3 Eksperimentelt oppsett	23
3.1 Laserkilde	23
3.2 Forsøkskammer	24
3.2.1 Strålelevering	25
3.3 Sensorer og instrumentering	25
3.4 Temperaturmåling	26
3.4.1 Kontaktprober	26
3.4.2 Radiometrisk temperaturmåling	27
3.5 Parameteroversikt fra målekampanje	32
4 Resultater	37
4.1 Tidsrekker	39
4.2 Profiler	53
5 Konklusjoner og utsyn	60
Vedlegg	
A Oppvarming ved svak absorpsjon	61
A.1 Oppvarming av fiberfez (engelsk end-cap)	62



1 Innledning

For å utvikle laservåpen mot innkommende prosjektiler eller droner er det viktig å undersøke og forstå mulige skadevirkninger på relevante konstruksjonsmaterialer. Slikt krever altså både eksperimentelle og teoretiske undersøkelser. I første omgang har vi fokussert mest på metalliske materialer der skadevirkningen består stort sett i å varme opp materialet til smeltepunktet. Som et ikke-metallisk materiale har vi også undersøkt karbonfiber. Dette materialet reagerer mest ved ablasjon – en prosess som vi ikke har prøvd å modellere.

Skademekanismen som ligger til grunn for laservåpenteknologi er *oppvarming* av et mål til det ødelegges fullstendig eller til man oppnår tilstrekkelig nedsatt funksjon. Nøyaktig hva dette innebærer er åpenbart sterkt situasjons- og målavhengig, men utgangspunktet for å bygge opp kunnskap om skadevirkningen ligger i god forståelse av varmeavsetning ved belysning, varmeledning i aktuelle materialer og konstruksjoner, og til slutt vurdering av påfølgende funksjonsnedsetting hos spesifikke mål. Samlet vil denne typen kunnskap danne et grunnlag for operasjonsanalyser og vurderinger av laservåpenteknologi som konsept. I denne rapporten tar vi for oss det mest grunnleggende ved å etablere et teoretisk og eksperimentelt rammeverk for å studere oppvarming og varmeledning i materialer bestrålt av kraftige lasere. I senere studier vil vi bygge videre på dette ved å studere konkrete mål for å avdekke spesifikke feilmekanismer, sårbarheter og skadeterskler.

Rapporten er bygget opp på følgende måte. I kapittel 2 diskuterer vi generell varmeledning og spesielt anvendelsen til teorien på et flatt, termisk isolert legeme med uendelig utstrekning i radiell retning. Løsningen til dette problemet er basert på greensfunksjonen og vi gir en beskrivelse av en numerisk implementering av løsningen. Diskusjonen av den fysikalske teorien er basert på bøkene “Lehrbuch der theoretischen Physik” av L.D. Landau og E.M. Lifschitz, vol. VI “Hydrodynamik” (tysk oversettelse av russisk original), og “Laser-Beam Interactions with Materials” av M. von Allmen og A. Blatter. Der vi evaluerer integraler og bruker høyere transcendent funksjoner baserer vi matematikken på bøkene “Table of Integrals, Series and Products” av I.S. Gradshteyn og I.M. Ryzhik 7th ed. (engelsk oversettelse av russisk original) og “Handbook of Mathematical Functions” av M. Abramowitz og I.A. Stegun.

I kapittel 3 beskrives testoppsettet på FFI. Oppsettet består av en kraftig laserkilde, optikk for strålelevering og et utvalg sensorer som brukes til å karakterisere laservirkningen. Vi skriver spesielt detaljert om metoden vi har utarbeidet for temperaturmåling på overflaten til prøvematerialene, siden dette er både viktig og utfordrende. Til slutt oppsummerer vi eksperimentelle parametere brukt i en målekampanje som ble gjennomført i samarbeid med Nammo 23. mai 2023.

I kapittel 4 gir vi temperaturmålinger fra 58 forskjellige kjøringene og sammenlikner disse med den teoretiske modellen fra kapittel 2. I denne sammenhengen diskuterer vi hvorfor noen kjøringene er i bedre samsvar med teorien enn andre og hvordan den teoretiske modellen kan forbedres for å få bedre samsvar med målingene.

I kapittel 5 oppsummerer vi de viktigste konklusjonene fra denne rapporten og gir forslag for fremtidige forbedringer.

Vedlegget viser til et annet interessant tilfelle som kan modelleres med den samme teorien som vi har utledet i kapittel 2. Her blir det modellert et tynt og flatt glasstykke med såpass svak absorpsjon

at stråleintensiteten kan antas som konstant langs hele veien gjennom glasset. Dette spesialtilfellet kan brukes for å modellere oppvarming av for eksempel en tynn linse med liten krumning (det vil si stor brennevidde) eller en fiberfez (engelsk: "endcap") til en glassfiber. I denne rapporten gir vi kun løsningen til det matematiske problemet. Numerisk implementering av løsningen og videre diskusjoner om hvordan oppvarmingen påvirker spenningstilstanden til glassbiten og dens deformasjon, eller i hvilken grad alle disse effekter påvirker strålekvaliteten til laseren, kommer vi til å diskutere i en fremtidig rapport.

2 Teori

2.1 Systemdefinisjon

Oppvarming av et stoff som blir truffet av en laserstråle kan være en ganske kompleks sak. Stråleenergien absorberes nemlig stort sett ved elektronene i form av kinetisk energi til frie elektroner i for eksempel metaller og i form av eksitasjonsenergi til bundne elektroner i andre stoffer. I metaller absorberes stråleenergien i mindre grad direkte av fononer som gjør at energien ikke deles opp jevnt blant alle frihetsgrader med det samme. Det er først gjennom kollisjoner av frie elektroner med gitteret at en stor nok del av energien overføres til varme. Denne relaksasjonstiden for bevegelsesmengde er heldigvis veldig kort. I isolatorer dannes det aller først varme ladningsbærere (elektroner og hull) som først termaliserer ved produksjon av fononer for så å rekombinere radiativt eller ikke-radiativt ved dannelse av enda flere fononer. Denne prosessen kan være ganske langsom i dielektriske materialer eller organiske polymerer.

For våre betraktninger ignorerer vi alle slike prosesser og antar at energien er delt opp jevnt blant alle frihetsgrader fra første øyeblikk. Relaksasjonstiden for energi som er relevant i denne sammenhengen ligger rundt 10^{-13} s for metaller og mellom 10^{-6} s og 10^{-12} s for ikke-metaller. Unntaket her er halvledere der levetiden til ladningsbærere kan være ganske mye lengre. Til sammenlikning varer bestrålingen på laserskadelaboratoriet opptil flere sekunder.

Utgangspunktet til våre diskusjoner er dermed en diffusjonslikning for temperatur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T$$

der χ er den tilsvarende diffusjonskonstanten, som naturligvis er gitt i enheter av m^2/s . På den høyre siden av denne likningen finner vi differensialer med hensyn på romkoordinater. Slike differensialer gir kun mening hvis man ikke ønsker en oppløsning som er kortere enn midlere fri veilengde til bærerne av termisk energi. I metaller dreier det seg som sagt om frie elektroner og fononer, men siden frie elektroner har den største midlere fri veilengde av de to (10^{-8} m), så er det den verdien som er mest relevant.

Diffusjonslikningen forteller kun hvordan en ujevn temperaturfordeling jevner seg ut med tiden, men den mangler et ledd som beskriver oppvarming fra en ekstern kilde. For dette deler vi diffusjonskonstanten opp i $\chi = \frac{\kappa}{\rho c_p}$, der κ er varmeledningskonstanten i enheter av $\text{W}/\text{K}\cdot\text{m}$, ρ er materialets tetthet og c_p er den spesifikke (per masse) varmekapasiteten ved konstant trykk i enheter av $\text{J}/\text{K}\cdot\text{kg}$. Med dette kan vi skrive

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T + p_{\text{heat}},$$

der p_{heat} er den avsatte varmeeffekten per volum fra en ekstern kilde i enheter av W/m^3 , som for eksempel den absorberte effekten fra en laserstråle. Hvis man i tillegg ønsker å tillate at varmeledningskonstanten kan ha en temperaturavhengighet, så kan man generalisere differensiallikningen til

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\kappa \text{grad } T) + p_{\text{heat}},$$

der varmeledningskonstanten nå har en implisitt stedsavhengighet på grunn av et ikke-uniformt temperaturfelt. Vi kommer i det følgende ikke til å bruke denne generaliseringen.

I neste trinn er det nødvendig å spesifisere oppvarmingsleddet for en laserstråle. For dette forestiller vi oss at strålen propagerer i positiv z retning og treffer ved $z = 0$ loddreid på et absorberende legeme. Laserstrålen kan ha en radiell profil og andelen som absorberes kan ha en tidsvariasjon (enten eksplisitt fordi strålen selv har en varierende intensitet, eller implisitt ved at refleksjonskoeffisienten og dermed andelen som absorberes har en temperaturavhengighet). Andelen som absorberes skal være gitt ved I_0 i enheter av W/m^2 og intensiteten svekkes eksponentielt ved

$$I = I_0(r, t)e^{-\alpha z},$$

der α^{-1} er absorpsjonslengden i m, som i metaller er omtrent lik midlere fri veilengde til elektronene, det vil si i størrelsesorden 10^{-8} m. I samme grad som intensiteten avtar, så blir varmeeffekt avsatt i materialet og dermed er

$$p_{\text{heat}} = -\frac{\partial I}{\partial z} = \alpha I_0(r, t)e^{-\alpha z}.$$

Med dette kan vi nå formulere differensiallikningen til problemet som

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T + \alpha I_0(r, t)e^{-\alpha z}.$$

Igjen, så kan man samle materialparameterne på høyre siden og vi får

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T + \frac{\alpha}{\rho c_p} I_0(r, t)e^{-\alpha z},$$

der kombinasjonen av den spesifikke (per masse) varmekapasiteten c_p og tettheten ρ også kan skrives som

$$\rho c_p = \frac{\rho C_p}{M_{\text{mol}}} = N C_p,$$

det vil si ved hjelp av den spesifikke (per stoffmengde) varmekapasiteten C_p i enheter av $\text{J/K}\cdot\text{mol}$ og molmassen M_{mol} eller partikkeltettheten N i enheter av mol/m^3 .

Vi forenkler problemet videre ved at vi antar at (i) laserstrålen er en generalisert¹ Gaußstråle med konstant² intensitet og (ii) absorpsjon av laserstrålen er uavhengig av temperaturen. Dermed forsvinner tidsavhengigheten til oppvarmingsleddet og vi kan formulere $I_0(r, t)$ eksplisitt som

$$I_0(r) = A \cdot I_0 e^{-\left(\frac{2r^2}{W_0^2}\right)^m},$$

der A er transmisjons- eller i vårt tilfelle absorpsjonskoeffisienten, I_0 er intensiteten i strålemidtpunktet, altså ved $r = 0$ og W_0 er strålebredden. Integrasjon over hele strålen gir stråleeffekt ved

$$P = \frac{\pi}{2} I_0 W_0^2 \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right),$$

¹Det kalles en supergaussisk stråle, der $m = 1$ representerer en vanlig gaussisk stråle og $m \rightarrow \infty$ en uniform intensitet innenfor stråleradien.

²Denne antakelsen er ikke nødvendig for den videre løsningen av problemet.

og dermed kan den absorberte strålen også formuleres som

$$I_0(r) = \frac{2AP}{\pi W_0^2 \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)} e^{-\left(\frac{2r^2}{W_0^2}\right)^m}.$$

Vi legger origo til koordinatsystemet der midtpunktet til laserstrålen treffer legemet og dermed kan vi skrive

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \chi \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \right\} T = \frac{2\alpha AP}{\pi \rho c_p W_0^2 \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)} e^{-\left(\frac{2}{W_0^2} r^2\right)^m} e^{-\alpha z}.$$

Vi antar videre at legemet er termisk isolert. Hvis vi, for enkelthets skyld, antar at legemet har uendelig utstrekning i radiell retning, men en endelig tykkelse L i z retningen, så betyr det at $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$ må gjelde for hele $z = 0$ og hele $z = L$ -planet til alle tider. Slike randbetingelser kalles også Neumann randbetingelser. Dette betyr samtidig at vi neglisjerer varmetap ved strålingsutsendelse langs hele overflaten.

En detalj som er interessant er at differensiallikningen (og randbetingelsene) er uavhengig av selve temperaturen. Det opptrer kun deriverte av temperaturen. Det betyr at uavhengig av hva temperaturen faktisk er, så kan vi anta at i begynnelsen så er temperaturen lik null, altså $T(\vec{r}, t = 0) = 0$, og alt vi beregner er temperaturøkningen på toppen av starttemperaturen. Med denne initialbetingelsen har vi nå definert hele det fysikalske systemet vi kommer til å beregne.

Et kjent problem med likningen vår er at den strengt tatt tillater øyeblikkelig varmetransport over uendelige avstander og dermed bryter med relativitetsteorien. Det belyser nødvendigheten av å inkludere også den andreordens tidsderiverte i likningen. Imidlertid er beregnede temperaturøkninger langt vekk fra varmekilden såpass små at man trygt kan neglisjere denne effekten, og det tilsvarende leddet.

2.2 Greensfunksjonen til problemet

Differensiallikningen er lineær med et inhomogent ledd (oppvarmingsleddet). Slike likninger kan typisk løses ved hjelp av greensfunksjoner. Her antar man at en løsning $f(\vec{r}, t)$ kan genereres ut ifra det inhomogene leddet $h(\vec{r}, t)$ og en greensfunksjon $g(\vec{r} - \vec{r}', t - t')$ ved

$$f(\vec{r}, t) = \int_{V'} \int_{t'} g(\vec{r} - \vec{r}', t - t') h(\vec{r}', t') d^3 r' dt',$$

der $g = 0$ for $t' > t$ for at løsningen overholder kausalitet. Hvis vi setter en slik løsning inn i differensiallikningen

$$\mathcal{D}f(\vec{r}, t) = h(\vec{r}, t),$$

der \mathcal{D} er en generell differensialoperator som karakteriserer differensiallikningen, så får vi

$$\int_{V'} \int_{t'} \mathcal{D}g(\vec{r} - \vec{r}', t - t') h(\vec{r}', t') d^3 r' dt' = h(\vec{r}, t).$$

Høyre side kan også skrives som

$$h(\vec{r}, t) = \int_{V'} \int_{t'} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') h(\vec{r}', t') d^3 r' dt',$$

og dermed kan alt samles under et integral ved

$$\int_{V'} \int_{t'} \left[\mathcal{D}g(\vec{r} - \vec{r}', t - t') - \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') \right] h(\vec{r}', t') d^3 r' dt' = 0.$$

Denne identiteten skal nå gjelde for et hvilket som helst inhomogent ledd $h(\vec{r}, t)$, som betyr at uttrykket innenfor hakeparentesene må være lik null. Vi får dermed en ny differensiallikning

$$\mathcal{D}g(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t'),$$

denne gangen for greensfunksjonen.

Vi skal nå anvende denne generelle teorien om greensfunksjonen til vårt spesielle problem. Med differensiallikningen vår som utgangspunkt må vi altså finne løsningen til

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \chi \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \right\} g(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t').$$

I tillegg må løsningen også tilfredsstille randbetingelsene våre. Nå er vi langt i fra de første som noengang har prøvd å finne en løsning til diffusjonslikningen. Tvert imot har det vært mye aktivitet gjennom årene slik at det er bygget hele biblioteker med greensfunksjoner for forskjellige randbetingelser. Dermed sparer vi oss bryet med å utlede løsningen selv og benytter oss av den ferdige løsningen³ for $t \geq t'$

$$g(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \frac{1}{8(\pi\chi(t-t'))^{3/2}} e^{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{4\chi(t-t')}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(z-z'-2nL)^2}{4\chi(t-t')}} + e^{-\frac{(z+z'-2nL)^2}{4\chi(t-t')}} \right].$$

Selv om vi ikke utleder greensfunksjonen selv, så kan vi fortsatt sjekke om den er riktig. Det første vi kan gjøre er å se om greensfunksjonen oppfyller randbetingelsene. Her er spesielt leddene i summen av betydning, siden de er de eneste som avhenger av z -koordinaten. Når vi deriverer leddene med hensyn på z og setter inn $z = 0$, så får vi

$$\frac{1}{2\chi(t-t')} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(z'+2nL)^2}{4\chi(t-t')}} (z' + 2nL) - e^{-\frac{(z'-2nL)^2}{4\chi(t-t')}} (z' - 2nL) \right].$$

Her ser vi at det første leddet for n kanselleres av det andre leddet for $-n$ og dermed er hele summen lik null. Når vi setter inn $z = L$ isteden så får vi

$$\frac{1}{2\chi(t-t')} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(z'-L+2nL)^2}{4\chi(t-t')}} (z' - L + 2nL) - e^{-\frac{(z'+L-2nL)^2}{4\chi(t-t')}} (z' + L - 2nL) \right].$$

³Det er faktisk løsningen for vårt problem pluss speilbildet langs den negative z retningen. Det betyr at i differensiallikningen til greensfunksjonen, så må vi erstatte $\delta(z - z')$ med $\delta(z - z') + \delta(z + z')$. Dette kommer vi til å bruke senere.

Her er det slikt at det første leddet for n kanselleres av det andre leddet for $1 - n$ og igjen blir hele summen lik null. Dermed har vi vist at randbetingelsene er oppfylt.

I neste trinn skal vi se om greensfunksjonen også oppfyller differensiallikningen. Det kan for eksempel vises ved å fouriertransformere hele differensiallikningen. Hvis vi for eksempel skriver³

$$\int_V \int_t \mathcal{D}g(\vec{r} - \vec{r}', t - t') e^{-i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} d^3r dt = \int_V \int_t \delta(x - x') \delta(y - y') [\delta(z - z') + \delta(z + z')] \delta(t - t') e^{-i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} d^3r dt,$$

og anvender dette på vår differensiallikning, så finner vi at

$$(i\omega + \chi k^2) \tilde{g}(\vec{k}, \omega) = 2 \cos(k_z z') e^{-ik_x x' - ik_y y' - i\omega t'}.$$

Her er det viktig å huske at greensfunksjonen $g(\vec{r} - \vec{r}', t - t')$ må forsvinne på randen av integrasjonsområdet,⁴ altså for $|x|, |y| \rightarrow \infty$ og $t \rightarrow \infty$. At det er sant, kan man lett etterprøve selv.

Det som gjenstår å vise er altså at den fouriertransformerte greensfunksjonen er gitt ved⁵

$$\int_V \int_{t \geq t'} \frac{e^{-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{4\chi(t-t')}}}{8(\pi\chi(t-t'))^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(z-z'-2nL)^2}{4\chi(t-t')}} + e^{-\frac{(z+z'-2nL)^2}{4\chi(t-t')}} \right] e^{-i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} d^3r dt = \frac{2 \cos(k_z z')}{i\omega + \chi k^2} e^{-ik_x x' - ik_y y' - i\omega t'}.$$

Vi begynner med integrasjonen over romkoordinaten x og får

$$\int e^{-\frac{(x-x')^2}{4\chi(t-t')}} e^{-ik_x x} dx = 2\sqrt{\pi\chi(t-t')} e^{-ik_x x'} e^{-k_x^2 \chi(t-t')}.$$

Dermed (og med et helt likt regnestykke for romkoordinaten y) får vi for venstre siden

$$e^{-ik_x x' - ik_y y'} \int_{-L}^L \int_{t \geq t'} \frac{e^{-(k_x^2 + k_y^2)\chi(t-t')}}{2\sqrt{\pi\chi(t-t')}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(z-z'-2nL)^2}{4\chi(t-t')}} + e^{-\frac{(z+z'-2nL)^2}{4\chi(t-t')}} \right] e^{-ik_z z - i\omega t} dz dt.$$

For å beregne fouriertransformasjonen i z retningen må vi integrere hvert ledd i summen fra⁴ $z = -L$ til L for så å legge sammen resultatene fra alle disse $\Delta z = 2L$ brede områder med midtpunktene $\pm z' + 2nL$ der $n = -\infty \dots \infty$. Dette er ekvivalent med et enkelt integral over et sammenhengende integrasjonsområde fra $z = -\infty$ til ∞ hvis integranden er periodisk. I så fall kan vi erstatte integralet over summen med et enkelt integral fra $z = -\infty$ til ∞ over en kontinuerlig funksjon, og vi får

$$e^{-ik_x x' - ik_y y'} \int_z \int_{t \geq t'} \frac{e^{-(k_x^2 + k_y^2)\chi(t-t')}}{2\sqrt{\pi\chi(t-t')}} \left[e^{-\frac{(z-z')^2}{4\chi(t-t')}} + e^{-\frac{(z+z')^2}{4\chi(t-t')}} \right] e^{-ik_z z - i\omega t} dz dt.$$

⁴Integrasjonsområdet i z retningen er egentlig gitt ved legemets utstrekning, altså fra 0 til L , men siden vi inkluderer dets speilbildet, så er integrasjonsområdet fra $-L$ til L . Det betyr samtidig at greensfunksjonen ikke behøver å forsvinne på randen av integrasjonsområdet – det er tilstrekkelig at funksjonen har periode $2L$.

⁵Husk at $g = 0$ for $t < t'$.

Dermed kan vi bruke samme regnestykke som for de to andre romkoordinatene en gang til – denne gangen for de to leddene med z og får uttrykket

$$e^{-ik_x x' - ik_y y'} \int_{t \geq t'} e^{-(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \chi(t-t')} \left[e^{-ik_z z'} + e^{ik_z z'} \right] e^{-i\omega t} dt,$$

eller forenklet til

$$2 \cos(k_z z') e^{-ik_x x' - ik_y y'} \int_{t \geq t'} e^{-(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \chi(t-t')} e^{-i\omega t} dt.$$

Det resterende tidsintegralet er enkelt å beregne og vi får til slutt

$$\frac{2 \cos(k_z z')}{i\omega + \chi k^2} e^{-ik_x x' - ik_y y' - i\omega t'},$$

det vil si nøyaktig det samme som høyre side. Dermed har vi vist at vi har riktig greensfunksjon til vårt problem.

2.3 Løsningen til problemet

Med greensfunksjonen på plass kan vi formulere løsningen til problemet som et integral ved⁵

$$T(\vec{r}, t) = \int_{V'} \int_{t > t'} \frac{1}{8 (\pi \chi(t-t'))^{3/2}} e^{-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{4\chi(t-t')}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(z-z'-2nL)^2}{4\chi(t-t')}} + e^{-\frac{(z+z'-2nL)^2}{4\chi(t-t')}} \right] \\ \times \frac{2\alpha AP}{\pi \rho c_p W_0^2 \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)} e^{-\left(\frac{2}{W_0^2} r'^2\right)^m} d^3 r' dt'.$$

Det som er litt vanskelig nå, er at integrasjonen over x' og y' ikke kan gjøres uavhengig fra hverandre – uttrykkene kan ikke faktoriseres for $m > 1$. Vi skal derfor reformulere integralet i sylinderkoordinater og får

$$T(\vec{r}, t) = \frac{\alpha AP}{4\pi^{5/2} \rho c_p W_0^2 \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)} \int_{V'} \int_{t > t'} \frac{1}{(\chi(t-t'))^{3/2}} e^{-\frac{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\phi - \phi')}{4\chi(t-t')}} e^{-\left(\frac{2}{W_0^2} r'^2\right)^m} \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(z-z'-2nL)^2}{4\chi(t-t')}} + e^{-\frac{(z+z'-2nL)^2}{4\chi(t-t')}} \right] e^{-\alpha z'} d\phi' r' dr' dz' dt'.$$

Vi begynner ved å integrere over vinkelen ϕ' , og med

$$\int_0^{2\pi} e^{-\alpha \cos(\phi - \phi')} d\phi' = 2\pi I_0(\alpha),$$

der I_0 er den nulte-ordens modifiserte besselfunksjonen av første type, så får vi

$$T(r, z, t) = \frac{\alpha AP}{2\pi^{3/2} \rho c_p W_0^2 \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)} \int_{r', z'} \int_{t > t'} \frac{1}{(\chi(t-t'))^{3/2}} e^{-\frac{r^2 + r'^2}{4\chi(t-t')}} e^{-\left(\frac{2}{W_0^2} r'^2\right)^m} \\ \times I_0\left(\frac{rr'}{2\chi(t-t')}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(z-z'-2nL)^2}{4\chi(t-t')}} + e^{-\frac{(z+z'-2nL)^2}{4\chi(t-t')}} \right] e^{-\alpha z'} r' dr' dz' dt'.$$

Det radielle integralet over r'

$$\mathcal{R}(r, t - t') = \frac{1}{W_0^2 \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)} e^{-\frac{r^2}{4\chi(t-t')}} \int_{r'} e^{-\frac{r'^2}{4\chi(t-t')} - \left(\frac{2}{W_0^2} r'^2\right)^m} I_0\left(\frac{rr'}{2\chi(t-t')}\right) r' dr'$$

og det longitudinale integralet⁶ over z'

$$\mathcal{L}(z, t - t') = \alpha \int_0^L \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(z-z'-2nL)^2}{4\chi(t-t')}} + e^{-\frac{(z+z'-2nL)^2}{4\chi(t-t')}} \right] e^{-\alpha z'} dz'$$

kan evalueres uavhengig av hverandre. Vi skal derfor i det følgende diskutere disse integralene separat for så å undersøke det resterende tidsintegralet

$$T(r, z, t) = \frac{AP}{2\pi^{3/2} \rho c_p} \int_0^t \frac{1}{(\chi(t-t'))^{3/2}} \mathcal{R}(r, t-t') \mathcal{L}(z, t-t') dt'$$

2.3.1 Det radielle integralet

Integralet over r' kan ikke uttrykkes i lukket form, men vi kan evaluere det for tre spesialtilfeller. Det første slike tilfellet er $m = 1$, det vil si en vanlig gaussisk stråleprofil. I så fall finner vi

$$\frac{1}{W_0^2} e^{-\frac{r^2}{4\chi(t-t')}} \int e^{-\left(\frac{1}{4\chi(t-t')} + \frac{2}{W_0^2}\right) r'^2} I_0\left(\frac{rr'}{2\chi(t-t')}\right) r' dr' = \frac{2\chi(t-t')}{W_0^2 + 8\chi(t-t')} e^{-\frac{2r^2}{W_0^2 + 8\chi(t-t')}}.$$

Det andre spesialtilfellet vi kan evaluere er for $m \rightarrow \infty$, det vil si for en uniform stråleintensitet innenfor stråleradien. I dette tilfellet må vi integrere

$$\frac{1}{W_0^2} e^{-\frac{r^2}{4\chi(t-t')}} \int_0^{\frac{W_0}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{r'^2}{4\chi(t-t')}} I_0\left(\frac{rr'}{2\chi(t-t')}\right) r' dr'.$$

Vi substituerer først $r' \rightarrow r\sigma$ og får

$$\frac{r^2}{W_0^2} e^{-\frac{r^2}{4\chi(t-t')}} \int_0^{\frac{W_0}{\sqrt{2}r}} e^{-\frac{r^2\sigma^2}{4\chi(t-t')}} I_0\left(\frac{r^2\sigma}{2\chi(t-t')}\right) \sigma d\sigma,$$

som vi kan uttrykke i lukket form kun hvis $r = \frac{W_0}{\sqrt{2}}$, altså nøyaktig ved den ekvivalente $\frac{1}{e^2}$ radien til den uniforme strålen. Her får vi som resultat

$$\frac{\chi(t-t')}{W_0^2} \left[1 - e^{-\frac{W_0^2}{4\chi(t-t')}} I_0\left(\frac{W_0^2}{4\chi(t-t')}\right) \right].$$

⁶Husk at greensfunksjonen ved de to leddene i summen allerede legger inn en speilvendt varmekilde i negativ z retning jamført diskusjonen i kapittel 2.2. Derfor skal det her integralet over z' kun gå fra 0 til L .

For andre endepunkter må integralet evalueres numerisk. Når man gjør det, så kan man like greit evaluere integralet for en generell supergaussisk profil, som var gitt ved

$$\frac{1}{W_0^2 \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)} e^{-\frac{r^2}{4\chi(t-t')}} \int e^{-\frac{r'^2}{4\chi(t-t')} - \left(\frac{2}{W_0^2} r'^2\right)^m} I_0\left(\frac{rr'}{2\chi(t-t')}\right) r' dr'.$$

Med den samme substitusjonen som før får man i så fall

$$\frac{r^2}{W_0^2} e^{-\frac{r^2}{4\chi(t-t')}} \int e^{-\frac{r^2 \sigma^2}{4\chi(t-t')} - \left(\frac{2r^2 \chi^2}{W_0^2}\right)^m} I_0\left(\frac{r^2 \sigma}{2\chi(t-t')}\right) \sigma d\sigma,$$

altså ikke noe som er mye mer vanskelig å beregne numerisk enn integralet for en uniform intensitetsprofil.

Det tredje spesialtilfellet er $r = 0$, der man får

$$\frac{1}{W_0^2 \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)} \int e^{-\frac{r'^2}{4\chi(t-t')} - \left(\frac{2}{W_0^2} r'^2\right)^m} r' dr',$$

eller, etter substitusjonen $r'^2 \rightarrow \xi$

$$\frac{1}{2W_0^2 \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)} \int e^{-\frac{\xi}{4\chi(t-t')} - \left(\frac{2}{W_0^2}\right)^m \xi^m} \xi^m d\xi.$$

Også dette integralet lar seg beregne for en uniform intensitetsprofil det vil si for $m \rightarrow \infty$, og man får

$$\frac{2\chi(t-t')}{W_0^2} \left[1 - e^{-\frac{W_0^2}{8\chi(t-t')}} \right].$$

For en generell supergaussisk profil må integralet evalueres numerisk.

2.3.2 Det longitudinale integralet

Når det gjelder det longitudinale integralet, så kan vi dessverre ikke bruke den samme argumentasjonen som i kapittel 2.2 for å omorganisere summen av alle integraler over $\Delta z' = 2L$ brede striper til et enkelt integral fra $z' = -\infty$ til ∞ , siden vi kun integrerer over halve stripen. Dermed kan vi ikke sette sammen alle biter til et integral over en kontinuerlig funksjon igjen. Vi kan derimot utvide integralet til å gå fra $-L$ til L (ved å gjøre integranden til en symmetrisk funksjon av z') og får

$$\frac{\alpha}{2} \int_{-L}^L \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(z-z'-2nL)^2}{4\chi(t-t')}} + e^{-\frac{(z+z'-2nL)^2}{4\chi(t-t')}} \right] e^{-\alpha|z'|} dz'.$$

Men selv med denne utvidelsen kan man fortsatt ikke omforme summen av integraler til et integral, siden integranden ikke er periodisk.⁷ Vi gjør isteden en annen forenkling. Tanken er at kildeleddet

⁷Ved en veldig stor absorpsjonslengde, det vil si for en veldig liten α slik at $\alpha L \ll 1$ er det fortsatt mulig, se vedlegg A.

er relevant kun i et veldig tynt lag ved $z = 0$. Vi skal derfor undersøke uttrykket i grensen av en forsvinnende liten absorpsjonslengde, det vil si en uendelig stor invers absorpsjonslengde α . Spesielt med

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|z'|} dz' = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z') dz',$$

der integrasjonsgrensene til integralet på høyre side kan erstattes med to endelige tall får vi

$$\int_{-L}^L \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(z-z'-2nL)^2}{4\chi(t-t')}} + e^{-\frac{(z+z'-2nL)^2}{4\chi(t-t')}} \right] \delta(z') dz' = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-2nL)^2}{4\chi(t-t')}}.$$

Her kan det være fornuftig å tilpasse resultatet til det eksperimentelle oppsettet. Spesielt er vi interessert i å måle temperaturen med en probe som er festet til enten forsiden eller baksiden av legemet, det vil si ved $z = 0$ eller $z = L$. Med disse spesifikasjonene kan vi forenkle summene til henholdsvis

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(2nL)^2}{4\chi(t-t')}} &= 2 \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 L^2}{\chi(t-t')}} \right], \\ 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(L-2nL)^2}{4\chi(t-t')}} &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(2n-1)^2 L^2}{4\chi(t-t')}}. \end{aligned}$$

Her har vi også brukt at leddene med $n = 1, 2, \dots$ er lik leddene med henholdsvis $n = -1, -2, \dots$ i den øvre summen og $n = 0, -1, \dots$ i den nedre summen på venstre side. Dermed kan vi forenkle summene til å starte ved $n = 1$ istedenfor ved $-\infty$. Vi skriver videre

$$\begin{aligned} 2 \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 L^2}{\chi(t-t')}} \right] &= 2 \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\frac{L^2}{\chi(t-t')}} \right)^{n^2} \right] = 2\vartheta_3 \left(0, e^{-\frac{L^2}{\chi(t-t')}} \right), \\ 4 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(2n-1)^2 L^2}{4\chi(t-t')}} &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\frac{L^2}{\chi(t-t')}} \right)^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} = 2\vartheta_2 \left(0, e^{-\frac{L^2}{\chi(t-t')}} \right), \end{aligned}$$

der $\vartheta_{2,3}$ er elliptiske thetafunksjoner (av type 2 og 3).

I det følgende skal vi også løse det longitudinale integralet uten noe forenkling. For dette integrerer vi hvert enkelt ledd i summen og får

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^L \left(e^{-\frac{(z-z'-2nL)^2}{4\chi(t-t')}} + e^{-\frac{(z+z'-2nL)^2}{4\chi(t-t')}} \right) e^{-\alpha z'} dz' &= \\ \alpha \int_0^L e^{-\frac{(z'-z+2nL)^2}{4\chi(t-t')}} e^{-\alpha z'} dz' + \alpha \int_0^L e^{-\frac{(z'+z-2nL)^2}{4\chi(t-t')}} e^{-\alpha z'} dz'. \end{aligned}$$

Vi substituerer i det første integralet $z' - z + 2nL \rightarrow \zeta'$ og i det andre integralet $z' + z - 2nL \rightarrow \zeta'$ og får

$$\alpha e^{-\alpha(z-2nL)} \int_{-z+2nL}^{-z+(2n+1)L} e^{-\frac{\zeta'^2}{4\chi(t-t')}} e^{-\alpha \zeta'} d\zeta' + \alpha e^{-\alpha(-z+2nL)} \int_{z-2nL}^{z-(2n-1)L} e^{-\frac{\zeta'^2}{4\chi(t-t')}} e^{-\alpha \zeta'} d\zeta'.$$

Vi substituerer videre $\zeta' + 2\alpha\chi(t-t') \rightarrow \zeta$ i begge integraler og får

$$\alpha e^{-\alpha z + 2\alpha n L + \alpha^2 \chi(t-t')} \int_{-z+2nL+2\alpha\chi(t-t')}^{-z+(2n+1)L+2\alpha\chi(t-t')} e^{-\frac{\zeta^2}{4\chi(t-t')}} d\zeta \\ + \alpha e^{\alpha z - 2\alpha n L + \alpha^2 \chi(t-t')} \int_{z-2nL+2\alpha\chi(t-t')}^{z-(2n-1)L+2\alpha\chi(t-t')} e^{-\frac{\zeta^2}{4\chi(t-t')}} d\zeta.$$

Disse integralene kan evalueres ved erf-funksjonen og vi får

$$\alpha \sqrt{\pi\chi(t-t')} e^{\alpha^2 \chi(t-t')} \\ \left\{ e^{-\alpha z + 2\alpha n L} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{-z + (2n+1)L + 2\alpha\chi(t-t')}{2\sqrt{\chi(t-t')}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{-z + 2nL + 2\alpha\chi(t-t')}{2\sqrt{\chi(t-t')}} \right) \right] \right. \\ \left. + e^{\alpha z - 2\alpha n L} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{z - (2n-1)L + 2\alpha\chi(t-t')}{2\sqrt{\chi(t-t')}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{z - 2nL + 2\alpha\chi(t-t')}{2\sqrt{\chi(t-t')}} \right) \right] \right\}.$$

Igjen er vi interessert i å måle temperatur ved $z = 0$ og $z = L$, derfor forenkler vi uttrykket til henholdsvis

$$\alpha \sqrt{\pi\chi(t-t')} e^{\alpha^2 \chi(t-t')} \\ \left\{ e^{2\alpha n L} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{(n + \frac{1}{2})L + \alpha\chi(t-t')}{\sqrt{\chi(t-t')}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{nL + \alpha\chi(t-t')}{\sqrt{\chi(t-t')}} \right) \right] \right. \\ \left. + e^{-2\alpha n L} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{-(n - \frac{1}{2})L + \alpha\chi(t-t')}{\sqrt{\chi(t-t')}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{-nL + \alpha\chi(t-t')}{\sqrt{\chi(t-t')}} \right) \right] \right\}.$$

og

$$\alpha \sqrt{\pi\chi(t-t')} e^{\alpha^2 \chi(t-t')} \\ \left\{ e^{\alpha(2n-1)L} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{nL + \alpha\chi(t-t')}{\sqrt{\chi(t-t')}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{(n - \frac{1}{2})L + \alpha\chi(t-t')}{\sqrt{\chi(t-t')}} \right) \right] \right. \\ \left. + e^{-\alpha(2n-1)L} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{-(n-1)L + \alpha\chi(t-t')}{\sqrt{\chi(t-t')}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{-(n - \frac{1}{2})L + \alpha\chi(t-t')}{\sqrt{\chi(t-t')}} \right) \right] \right\}.$$

Løsningen til det longitudinale integralet er nå summen over alle disse leddene fra $n = -\infty$ til ∞ .

2.3.3 Tidsintegralet

Uansett på hvilken måte vi velger å løse de to forrige integralene, så må tidsintegralet løses numerisk. Vi tar som eksempel det enkleste tilfellet som er en gaussisk (g) stråleprofil med en uendelig tynn ($\alpha \rightarrow \infty$) varmekilde ved $z = 0$. For dette spesialtilfellet har vi fått

$$T_g^\infty(r, 0/L, t) = \frac{2AP}{\pi^{3/2} \rho c_p} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\chi(t-t')}} \frac{1}{W_0^2 + 8\chi(t-t')} e^{-\frac{r^2}{W_0^2 + 8\chi(t-t')}} \vartheta_{3/2} \left(0, e^{-\frac{L^2}{\chi(t-t')}} \right) dt',$$

der vi skal bruke ϑ_3 for $z = 0$ og ϑ_2 for $z = L$.

Vi husker nå at vi alltid har greid å få analytiske uttrykk for det longitudinale integralet også uten noe forenkling. Derfor virker det som naturlig å relatere alle lengder som opptrer i problemet til lengden L som karakteriserer det longitudinale integralet. Vi substituerer derfor i tidsintegralet $\chi(t-t')/L^2 \rightarrow \tau^2$ og får

$$T_g^\infty(r, 0/L, t) = \frac{4AP}{\pi^{3/2} \chi L \varrho c_p} \int_0^{\sqrt{\frac{\chi t}{L^2}}} \frac{1}{(W_0/L)^2 + 8\tau^2} e^{-\frac{2(r/L)^2}{(W_0/L)^2 + 8\tau^2}} \vartheta_{3/2}\left(0, e^{-\frac{1}{\tau^2}}\right) d\tau.$$

Dette integralet må altså løses numerisk.

Som et annet eksempel ser vi på en uniform (u) stråleprofil (men igjen med en uendelig tynn varmekilde). I dette tilfellet får vi

$$T_u^\infty(r, 0/L, t) = \frac{AP}{\pi^{3/2} \varrho c_p} \int_0^t \frac{1}{(\chi(t-t'))^{3/2}} \vartheta_{3/2}\left(0, e^{-\frac{L^2}{\chi(t-t')}}\right) \times \left[\frac{r^2}{W_0^2} e^{-\frac{r^2}{4\chi(t-t')}} \int_0^{\frac{W_0}{\sqrt{2}r}} e^{-\frac{r^2 \sigma^2}{4\chi(t-t')}} I_0\left(\frac{r^2 \sigma}{2\chi(t-t')}\right) \sigma d\sigma \right] dt',$$

der uttrykket i hakeparentesene kan erstattes med de to tilsvarende analytiske løsningene til integralet for henholdsvis $r = 0$ og $r = W_0/\sqrt{2}$ fra kapittel 2.3.1. Med den samme substitusjonen som før, får vi

$$T_u^\infty(r, 0/L, t) = \frac{2APr^2}{\pi^{3/2} \chi L W_0^2 \varrho c_p} \int_0^{\sqrt{\frac{\chi t}{L^2}}} \int_0^{\frac{W_0}{\sqrt{2}r}} \frac{\sigma}{\tau^2} \vartheta_{3/2}\left(0, e^{-\frac{1}{\tau^2}}\right) e^{-\frac{r^2(\sigma^2+1)}{4L^2\tau^2}} I_0\left(\frac{r^2 \sigma}{2L^2\tau^2}\right) d\sigma d\tau$$

for det generelle integralet. For de to radiene der vi kan løse integralet over σ analytisk får vi (med den samme substitusjonen) henholdsvis

$$T_u^\infty(0, 0/L, t) = \frac{4APL}{\pi^{3/2} \chi W_0^2 \varrho c_p} \int_0^{\sqrt{\frac{\chi t}{L^2}}} \vartheta_{3/2}\left(0, e^{-\frac{1}{\tau^2}}\right) \left[1 - e^{-\frac{W_0^2}{8L^2\tau^2}} \right] d\tau,$$

$$T_u^\infty\left(\frac{W_0}{\sqrt{2}}, 0/L, t\right) = \frac{2APL}{\pi^{3/2} \chi W_0^2 \varrho c_p} \int_0^{\sqrt{\frac{\chi t}{L^2}}} \vartheta_{3/2}\left(0, e^{-\frac{1}{\tau^2}}\right) \left[1 - e^{-\frac{W_0^2}{4L^2\tau^2}} I_0\left(\frac{W_0}{4L^2\tau^2}\right) \right] d\tau.$$

Temperaturen for en supergaussisk (sg) stråleprofil eller en utstrakt varmekilde (gitt ved en endelig α) kan også formuleres som et dobbeltintegral, men uttrykkene blir litt mer kompliserte. Vi kommer i det følgende til å fokusere på de enkle uttrykkene som vi har utledet eksplisitt i dette kapitlet her.

2.4 Numerisk implementering

For en numerisk analyse må vi spesifisere (i) laseren, (ii) materialet som varmes opp og (iii) geometrien. Når det gjelder laseren, så trenger man å vite

- effekten P ,

- stråleprofilen gitt ved m der (0) tilsvarer uniform, (1) er gaussisk og (> 1) er supergaussisk,
- den effektive $\frac{1}{e^2}$ strålebredden W_0
- og bølgelengden⁸ λ .

Materialet som varmes opp karakteriseres ved

- diffusjonskonstanten for temperatur χ ,
- produktet⁹ av tettheten og den spesifikke varmekapasiteten per masse ved konstant trykk ρc_p ,
- transmisjonskoeffisienten A
- og den inverse absorpsjonslengden α .

Geometrien til oppsettet inkluderer

- tykkelsen L til legemet,
- vinkelrett avstand r til målestedet fra stråleaksen
- og tidspunktet t til målingen.

Programmet laster inn et bibliotek med materialeegenskaper der første felt er navnet til stoffet, andre til fjerde felt er henholdsvis χ i (m^2/s), ρ i (g/cm^3) og c_p i (J/gK), mens femte og sjette felt er $n \times 2$ matriser med λ i (nm) i første kolonne til begge matriser og med henholdsvis tilsvarende transmisjonskoeffisient i (%) og absorpsjonslengde α^{-1} i (nm) i andre kolonne. Programmet plukker ut materialeegenskapene basert på navn og nærmeste bølgelengde.

Basert på stråleprofilen velger programmet hvilket integral som skal evalueres. For en gaussisk stråleprofil, er det alltid det samme endimensjonale tidsintegralet. For en uniform stråleprofil sjekker programmet om radiell avstand tilsvarer et av de to spesialtilfellene der vi har en analytisk løsning til det radielle integralet. I så fall evalueres også kun det tilsvarende endimensjonale tidsintegralet. I alle andre tilfeller evalueres det todimensjonale integralet.

Vi har frem til nå hverken implementert integralene tilsvarende en supergaussisk stråleprofil eller summen for en ikke-forsvinnende absorpsjonslengde. Men det viser seg at selv i tilfellet med en tynn varmekilde, der vi skal evaluere en elliptisk thetafunksjon, så må vi erstatte thetafunksjonen ved den tilsvarende summen. Det er nemlig slikt at det kun finnes implementeringer av thetafunksjonen når den er formulert ved den elliptiske modulusen m , og ikke når den formuleres ved *nome*, altså i den formen vi trenger den. Det er lett å beregne *nome* fra modulus, men å beregne modulus fra *nome* er ikke like enkelt. Det letteste er derfor å evaluere summen direkte.

Besselfunksjonen $I_0(x)$ i noen av integralene er en eksponentiell voksende funksjon. Ut ifra dette er det numerisk gunstig å beregne produktet $\tilde{I}_0(x) = e^{-x} I_0(x)$, som gjerne betegnes som skalert besselfunksjon. I tidsintegralet for en uniform stråleprofil ved radiell avstand $r = W_0/\sqrt{2}$ er det faktisk nettopp denne skalerte besselfunksjonen man behøver å integrere (se kapittel 2.3.3). I dobbeltintegralet for en uniform stråleprofil ved en generell radiell avstand r kan vi for eksempel

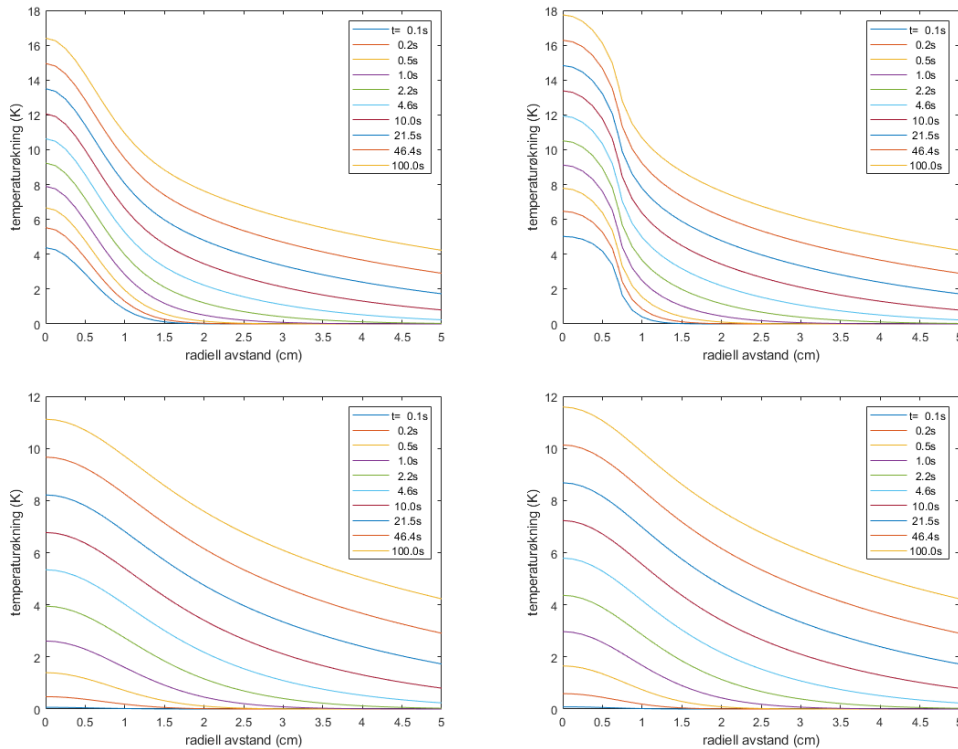
⁸Selv om bølgelengden ikke opptrer eksplisitt i formlene, så kommer både transmisjonskoeffisienten A og den inverse absorpsjonslengden α til å avhenge av den. Derfor kommer den til å være en viktig parameter.

⁹Dette produktet kan uttrykkes på forskjellige måter jmført diskusjonen i kapittel 2.1.

erstatte de relevante delene av integranden (se kapittel 2.3.3) med

$$e^{-\frac{r^2(\sigma^2+1)}{4L^2\tau^2}} I_0\left(\frac{r^2\sigma}{2L^2\tau^2}\right) = e^{-\frac{r^2(\sigma-1)^2}{4L^2\tau^2}} \tilde{I}_0\left(\frac{r^2\sigma}{2L^2\tau^2}\right),$$

for å øke den numeriske stabiliteten.



Figur 2.1 Temperaturøkning foran ($z = 0$, øvre paneler) og bak ($z = L$, nedre paneler) som funksjon av radiell avstand fra stråleaksen ved forskjellige tidspunkter etter starten av bestrålingen med en gaussisk (venstre paneler) og uniform (høyre paneler) stråleprofil. For ytterligere detaljer, se tekst.

For det samme integralet kan man også spørre seg om integranden er regulær for $\tau \rightarrow 0$. Her husker vi at hverken den skalerte besselfunksjonen med $\lim_{\tau \rightarrow 0} \tilde{I}_0\left(\frac{r^2\sigma}{2L^2\tau^2}\right) = 0$ eller thetafunksjonene med $\lim_{\tau \rightarrow 0} \vartheta_2\left(0, e^{-\frac{1}{\tau^2}}\right) = 0$ og $\lim_{\tau \rightarrow 0} \vartheta_3\left(0, e^{-\frac{1}{\tau^2}}\right) = 1$ skaper noen problemer. Vi fokuserer derfor på

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sigma}{\tau^2} e^{-\frac{r^2(\sigma-1)^2}{4L^2\tau^2}} = 0,$$

som lett kan vises ved å anvende L'Hôpitals regel.

Programmet tar som input enten enkeltverdier eller vektorer både for radiell avstand og tidspunkt. Dermed er det mulig å generere temperaturfordelinger på forsiden og baksiden av legemet for en rekke tidspunkter i en eneste kjøring. Figur 2.1 viser typiske resultater for en henholdsvis gaussisk (venstre paneler) og en uniform (høyre paneler) stråleprofil for $z = 0$ (øvre paneler) og $z = L$ (nedre

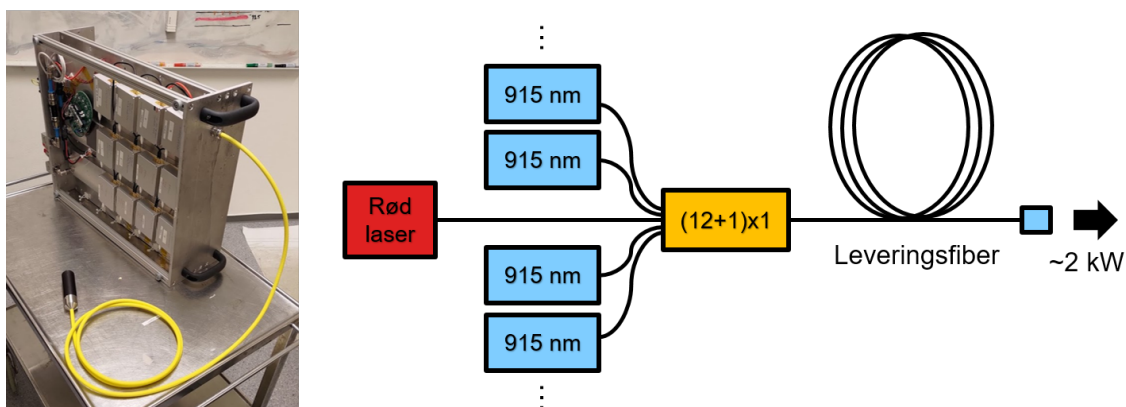
paneler). I alle tilfeller ble det simulert en 1 kW laser med 1 μm bølgelengde og 1 cm effektiv $1/e^2$ stråleradius som treffer en 1 cm tykk aluminiumsplate.

3 Eksperimentelt oppsett

Et laboratorieoppsett for måling av laservirkning på ulike materialer har blitt etablert på FFI. Oppsettet består av en kraftig laserkilde, optikk for strålelevering og et forsøkskammer med sensorer. Dette kapitlet beskriver laserkilden og sensoroppsettet som brukes til å karakterisere laservirkningen. Vi vektlegger spesielt beskrivelse av metoden for måling av temperatur på overflaten til prøvematerialene. Til slutt oppsummerer vi eksperimentelle parametere brukt i en målekampanje for laservirkningsforsøk av en rekke ulike materialer som ble gjennomført i samarbeid med Nammo 23. mai 2023.

3.1 Laserkilde

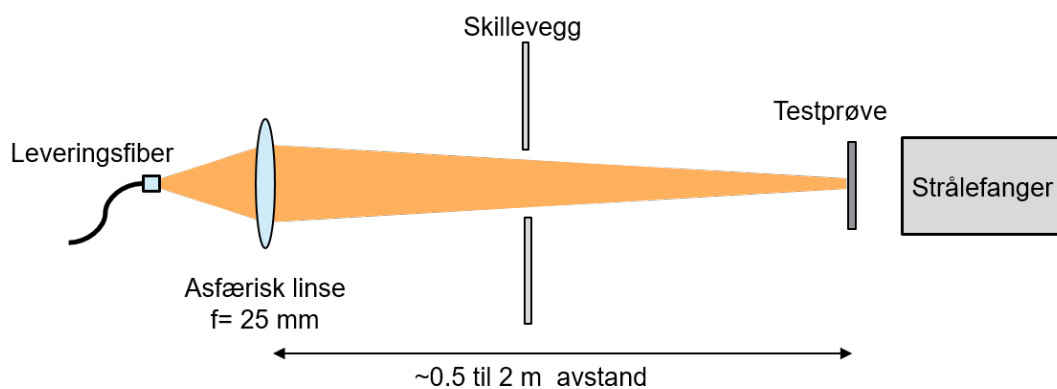
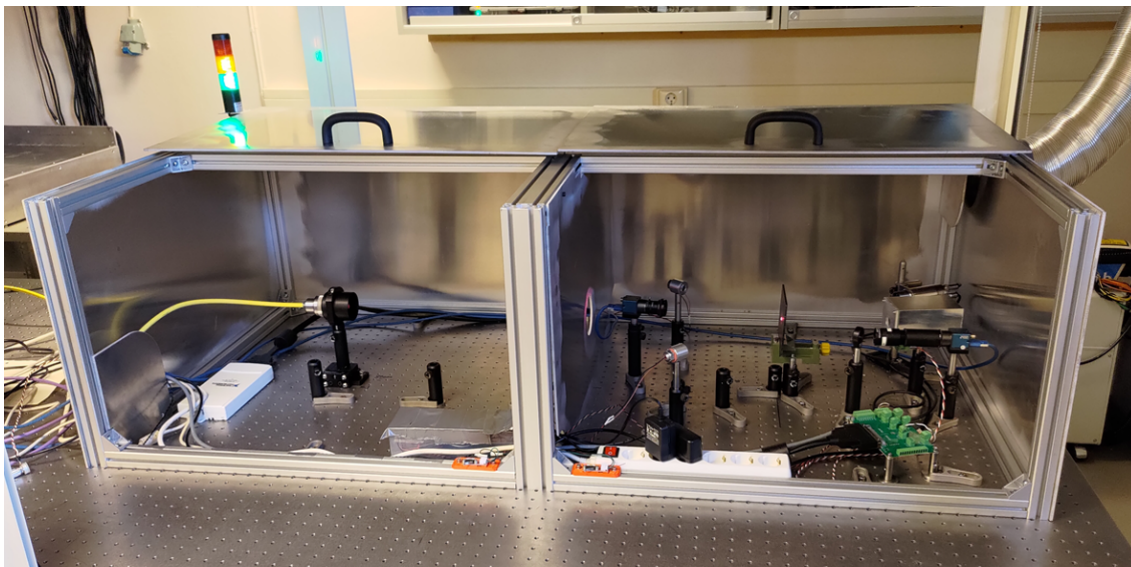
Laserkilden er konstruert svært enkelt ved å kombinere lyset fra 12 fiberkoblede diodelasere i én felles fiber i en såkalt pumpekobler. Dette illustreres i Figur 3.1, sammen med et bilde av kilden som viser de 12 diodelasere montert på vannkjølte plater. Hver av laserne har en nominell utgangseffekt på 170 W ved fullt pådrag og en bølgelengde på 915 nm. Samlet utgangseffekt etter pumpekobleren er målt til 1,9 kW med alle diodene. Strålen leveres i en kjerneløs dobbeltkappefiber med diameter på 250 μm og numerisk apertur på 0,46. Leveringsfiberen er 2 m lang og termineres med et antirefleksjonsbelagt endestykke eller fiberfez (engelsk "endcap"). En rød laser spleiset inn i pumpekobleren fungerer som en synlig opplinjeringstråle. Laserkilden inneholder fotodioder på bestemte posisjoner som gjør at den kan monitorere sin egen tilstand og terminere et forsøk umiddelbart (innenfor et millisekund) dersom det oppstår skade i selve kilden eller det kommer uønsket mye reflektert lys fra en prøve.



Figur 3.1 Bilde og illustrasjon av laserkilden som består av 12 diodelasere koblet inn i én felles fiber.

3.2 Forsøkskammer

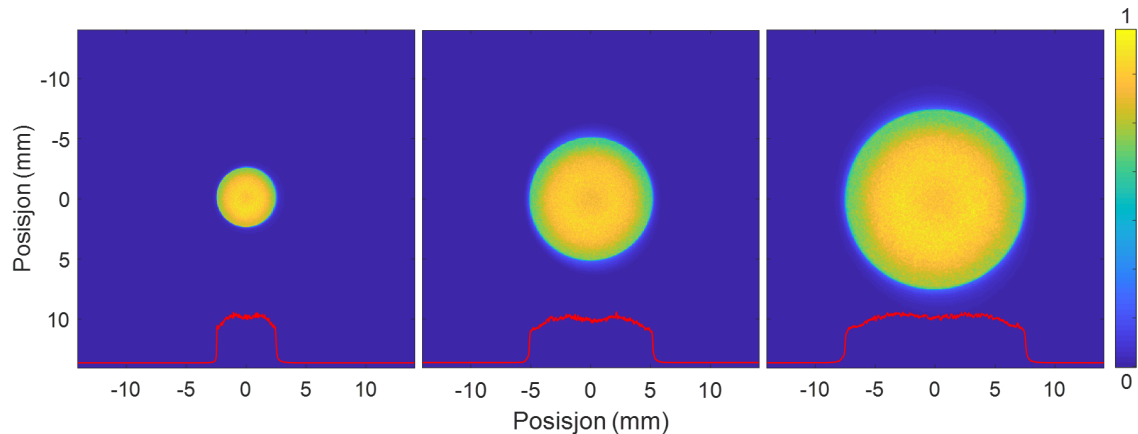
Forsøkene gjøres i et lystett kammer som er avbildet i Figur 3.2. Kammeret har 4 mm tykke aluminiumsvegger, som er tilstrekkelig for å motstå direkte kontinuerlig belysning på full effekt med den minste realiserbare strålen fra optikken som benyttes. Forsøkskammeret er delt i to hvor leveringsoptikken (venstre kammer i Figur 3.2) holdes adskilt fra prøvekammeret (høyre kammer i Figur 3.2). Dette skillet kombinert med en kontinuerlig luftstrøm fra venstre mot høyre drevet av et avtrekkssystem hinder kontaminering av optikken fra røyk og smuss som oppstår under belysningstestene. Avtrekkssystemet som trekker ut luften fra forsøkskammeret benytter kullfiltre for rensing av avgasser.



Figur 3.2 Øverst: bilde av forsøkskammeret. Nederst: Illustrasjon av stråleleveringsoppsettet.

3.2.1 Strålelevering

Stråleprofilen på enden av fiberen blir avbildet i prøveplanet ved hjelp av en asfærisk linse (Edmund Optics 49593). Fiberen er kraftig multimode og gir derfor tilnærmet flate (“top hat”) stråleprofiler. Brennvidden til linsa er 25 mm, og vi bestemmer strålestørrelsen på prøven ved å justere avstand mellom linse og prøven. Figur 3.3 viser stråleprofiler målt ved 5 mm, 10 mm og 15 mm strålediameter.



Figur 3.3 Stråleprofiler avbildet i prøveplanet for strålediameterer på 5, 10 og 15 mm. De røde linjene viser normalisert intensitet i horisontale tverrsnitt gjennom midten av strålene.

3.3 Sensorer og instrumentering

Forsøkskammeret inneholder et utvalg sensorer for å studere skadevirkning under belsningsforsøkene. Følgende sensorer brukes (ikke nødvendigvis alle samtidig):

Synliglyskamera: Visuell monitorering av laservirkningen på fremsiden av testprøvene. Opptak gjøres på 400 FPS med kraftig belsning for å undertrykke egenstråling fra prøvene ved høye temperaturer.

IR-kamera: Radiometrisk temperaturmåling på baksiden av testprøvene. Optris XI400 (mikrobolometer), 382x288 piksler, 80 FPS, følsomt fra 8 μm til 14 μm , dynamisk måleområde fra 0 °C til 1500 °C.

Termoelementer (engelsk: “thermocouples”): Kontaktprober festes på baksiden av prøvematerialer for direkte temperaturmåling. Oppsettet har elektronikk for samtidig utlesning av seks prober. Vi benytter K-type termoelementer med øvre temperaturgrense i underkant av 1300 °C.

Gjennombrenningsdetektor: Fotodiode plassert inne i strålefangeren som måler lysmengden transmittert gjennom prøvene.

Utgangseffektsensor: Fotodiode i laserkilden som måler effekt levert ut av fiberen.

Tilbakekoblingsensor: Fotodiode i laserkilden som måler effekt koblet tilbake i fiberen, typisk reflektert fra en testprøve.

Kamera og optikk for strålekarakterisering: Avbilde laserstrålen i prøveplanet. Brukes til opplinjering og fokusering av laserstrålen.

Optisk effektmeter: Kalibrering av lasereffekt.

3.4 Temperaturmåling

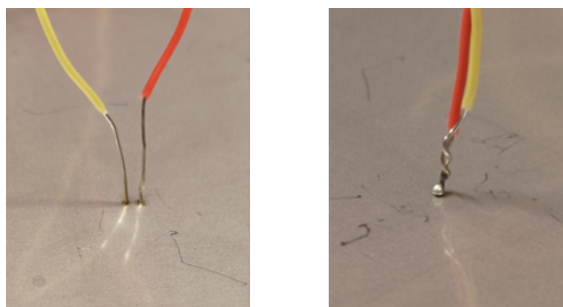
Den viktigste metrikken i forsøkene er temperaturen på overflaten til testmaterialene. Vi ønsker å måle temperaturer som spenner fra romtemperatur til $\sim 1500\text{ }^{\circ}\text{C}$ med en tidsoppløsning som fanger dynamikken i forsøkene og romlig oppløsning tilstrekkelig for å studere varmefordeling og -utbredelse. Vi ønsker i tillegg en målemetode som muliggjør rask og repeterbar prøvepreparering og som er kompatibel med materialer med svært ulike og til dels ukjente mekaniske, termiske og optiske egenskaper. Kombinasjonen av disse aspektene gjør temperaturmålingene utfordrende, og vi beskriver i det følgende måleteknikken vi har utarbeidet. Metoden baserer seg på en radiometrisk temperaturmåling med et IR-kamera i kombinasjon med et emissivitetsreferansebelegg som påføres prøvene. Dette referansebelegget kalibrerer vi gjennom målinger med kontaktprober.

3.4.1 Kontaktprober

I dette arbeidet bruker vi kontaktprober av typen termoelementer (engelsk: “thermocouple”) som baserer seg på måling av den temperaturfølsomme Seebeck-spenningen som oppstår i overgangen mellom to forskjellige elektriske ledere. Typisk består proben av to tråder av ulike metallegeringer, som for eksempel *kromel* og *alumel* i det mest utbredte termoelementet som kalles K-type. Disse er egnet for temperaturmåling fra $-200\text{ }^{\circ}\text{C}$ til $\sim 1300\text{ }^{\circ}\text{C}$ og er i tillegg lett å sveise til de fleste typer stål.

Selve innfestingen av termoelementet må være gjennomtenkt for å muliggjøre nøyaktige målinger. Vår festemetode vises i Figur 3.4, og går ut på å sveise de to lederne til en prøve *separat*, med en så liten avstand som praktisk mulig. Dette skiller seg fra tradisjonell innfesting hvor de to lederne først vikles og sveises sammen til en liten perle som siden presses mekanisk eller sveises til prøven. I dette tilfellet er ikke kontaktpunktet mellom de to lederne i termoelementet plassert på overflaten til prøvematerialet, men et stykke opp langs lederne. En nøyaktig temperaturbestemming av overflaten må derfor ta hensyn til varmeoverføringen gjennom perlen og opp til Seebeck-overgangen der de sammentvunne lederne skiller lag. Slike detaljer er vanskelig å kontrollere, men problemet omgås i sin helhet med vår festemetode som naturlig gir temperaturmålinger *nøyaktig* på overflaten.

Til tross for nøyaktige temperaturmålinger med termoelementer er prøveprepareringen tidkrevende. Spesielt om man ønsker en viss romlig oppløsning gjennom å feste mange prober. Festemetoden er også begrenset til prøvematerialer som lar seg sveise til lederne. Kontaktprober er derfor upraktisk for store målekampanjer med varierte materialutvalg, og derfor bruker vi termoelementer kun som kalibreringsreferanse for radiometriske temperaturmålinger.



Figur 3.4 Termoelementer sveiset fast til en rustfri stålplate. På venstre side er lederne sveiset fast separat, og på høyre side er de tvunnet og sveiset sammen i forkant.

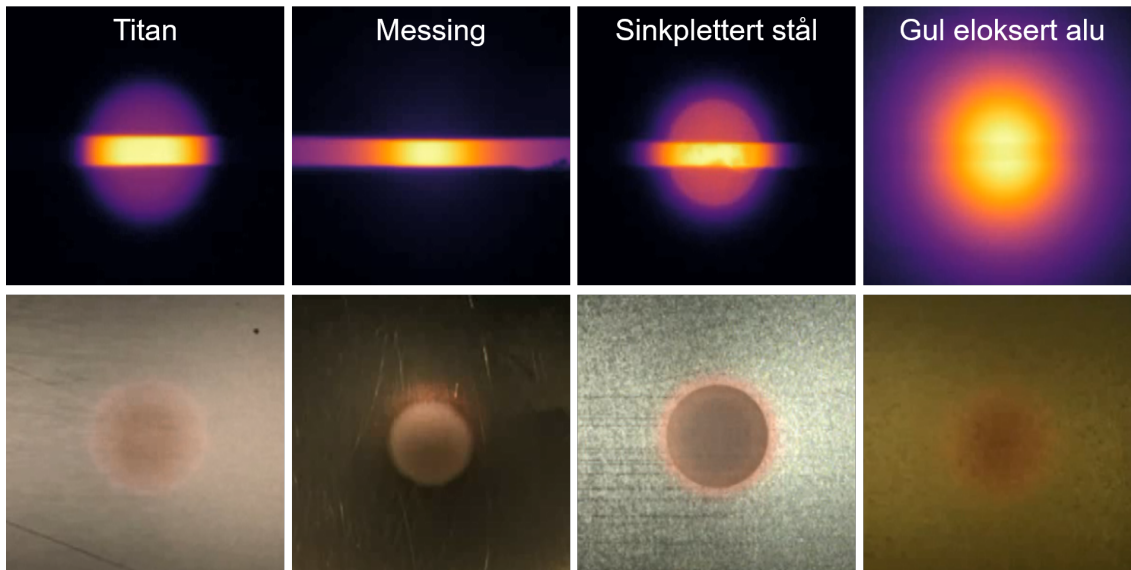
3.4.2 Radiometrisk temperaturmåling

Radiometriske temperaturmålinger er attraktive sammenliknet med kontaktmålinger ved at de er naturlig ikke-invasive og gir god oppløsning i både tid og rom. En utfordring er riktignok at emissiviteten til prøvene man studerer må være kjent, og denne varierer generelt med materiale, overflatestruktur, overflatebelegg og ikke minst temperatur. I vårt måleoppsett omgår vi dette ved å påføre et *referansebelegg* med kjent emissivitet, og i denne seksjonen beskriver vi viktige aspekter rundt dette.

Helt først kan vi med Figur 3.5 illustrere viktigheten av en emissivitetsreferanse ved å betrakte bilder tatt med IR-kamera og synliglyskamera av utvalgte testmaterialer fra målekampanjen som beskrives i Kapittel 4. Alle bildene er tatt på et tidspunkt i forsøkene hvor temperaturen i midten av strålen var 500 °C. Bildene illustrerer stor variasjon i emissivitet for de ulike materialene, hvor for eksempel messing har veldig lav emissivitet mens prøven av gul eloksert aluminium faktisk viser negativ kontrast mot referansebelegget. Vi kan også legge merke til romlige variasjoner som skyldes emissivitetsendringer med temperatur. Dette er spesielt tydelig i målingen av sinkplettert stål hvor pletteringen tilsynelatende forsvinner eller endrer karakter betydelig ved oppvarming og etterlater et område med forhøyet emissivitet.

3.4.2.1 Emissivitetsreferanse

Vi testet flere kandidater som emissivitetsreferanse i innledende fase av arbeidet, og valget falt til slutt på Resbond™ 989FS, som er et keramisk lim med høyt innhold av aluminapartikler (Al_2O_3). Som utdypet under har materialet forholdsvis høy emissivitet med svak temperaturavhengighet og det er stabilt opp til minst 1650 °C. Videre er limet enkelt å påføre og det herder raskt i løpet av 5 minutter ved 90 °C. Limet har vist seg å ha akseptabel heft til alle materialer vi har undersøkt foreløpig, som inkluderer flere typer stål, aluminium, messing, titan, karbonfiber, mm., med ulike overflateteksturer og overflatebehandlinger. Vi påfører typisk materialet som en tynn stripe på baksiden av prøvene maskert med Kapton-tape for å gi en veldefinert lagtykkelse på 50 µm. Figur 3.6 nedenfor viser bilde av en prøve preparert med en stripe av Resbond™ 989FS.



Figur 3.5 IR-bilder (øverst) og synligsbilder (nederst) av utlagte prøver under belsningsforsøk på et tidspunkt hvor temperaturen midt i strålen var 500 °C. Emissivitetsreferansebelegget er lagt på baksiden av prøvene i form av ca. 2 mm brede horisontale striper.

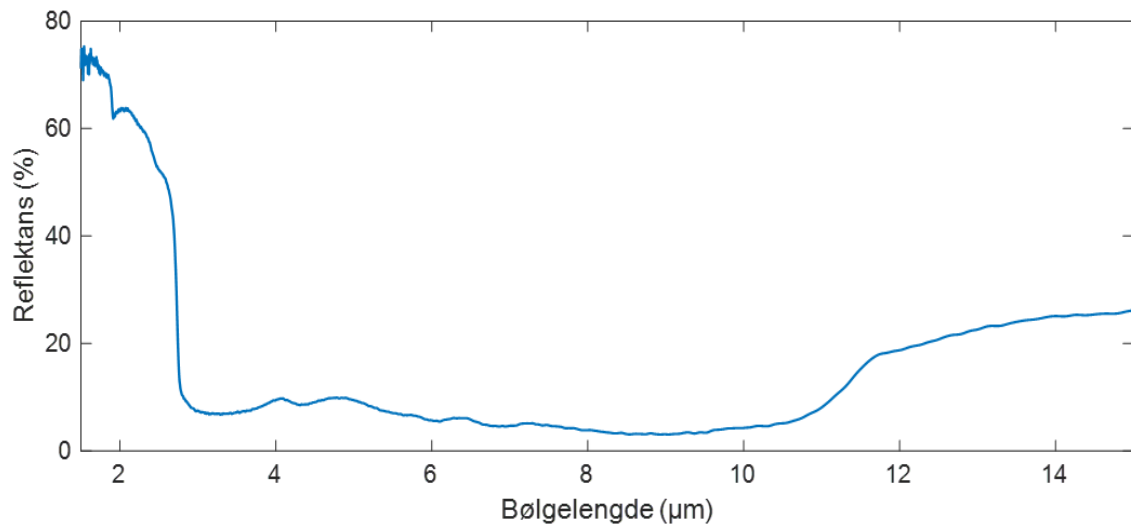


Figur 3.6 Beholder med emissivitetsreferansen Resbond™ 989FS og en stripe av denne påført en stålplate.

3.4.2.2 Emissivitet ved romtemperatur

Vi målte refleksjonsspekteret til Resbond™ 989FS ved romtemperatur med et FTIR-spektrometer, se Figur 3.7. Materialet har høy refleksans fra det synlige området og opp til kortbølge-IR,

og lav reflektans i mellom- og langbølge. IR-kameraet vi bruker i måleoppsettet har oppgitt følsomhetsområde fra 4 μm til 8 μm . Den detaljerte spektrale kameraresponsiviteten er ikke kjent, men om vi antar flat respons i følsomhetsområdet får vi en gjennomsnittsreflektans på 12 % som tilsvarer en emissivitet på 0,88. Vi målte også reflektansen til et belegg med dobbel tykkelse (100 μm) uten å observere målbart avvikende resultater. Dette bekrefter at lagtykkelsen på 50 μm som vi bruker i våre belysningstester er tilstrekkelig.

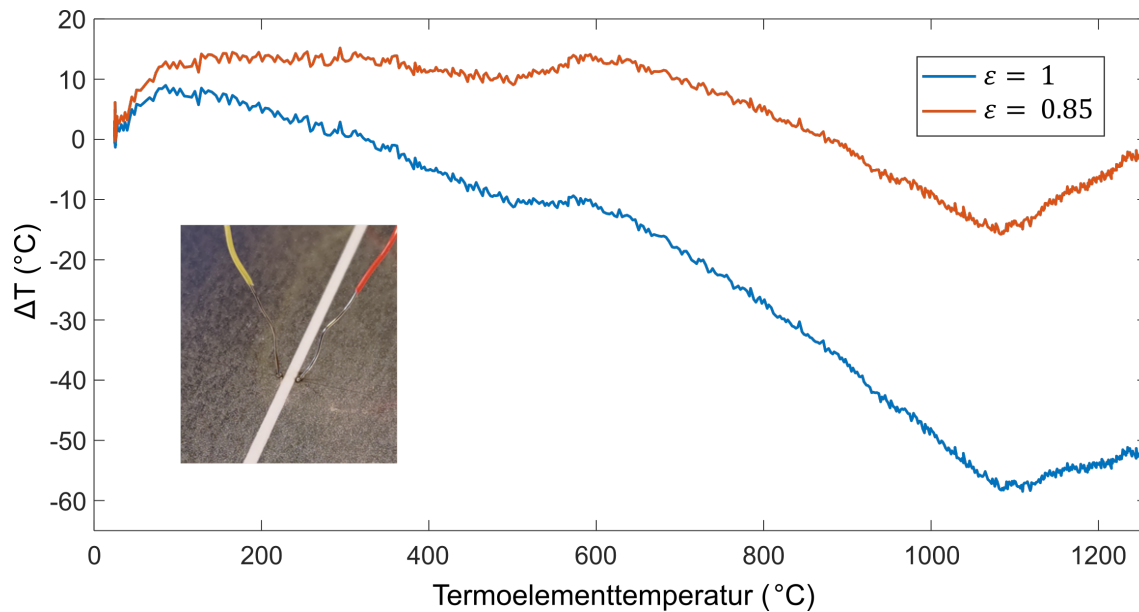


Figur 3.7 FTIR-refleksjonsspekter av Resbond™ 989FS målt ved romtemperatur.

3.4.2.3 Emissivitet vs. temperatur

Det er rimelig å forvente at emissiviteten til referansebelegget kan variere over det store temperaturintervallet vi studerer i belysningsforsøkene. Vi har derfor målt denne temperaturavhengigheten. Som vist i Figur 3.8 sammenlikner vi helt enkelt temperaturen til et punkt på en prøve målt med kontaktprober med radiometrisk temperaturmåling av tilsvarende punkt med IR-kameraet. Ved å gjøre dette i et forsøk hvor vi varmer prøven sakte opp kan vi bestemme emissiviteten til referansematerialet *slik den fremstår for IR-kameraet* i måleintervallet fra romtemperatur til kontaktprobene smelter på rundt 1300 grader. Dersom vi antar en konstant emissivitet på 1,0 viser Figur 3.8 et temperaturavvik opp mot 60 °C for de radiometriske målingene, mens ved å anta en konstant emissivitet på 0,85 reduseres avviket til innenfor $\sim \pm 10$ °C over hele temperaturintervallet.

I prinsippet er det mulig fra disse målingene å kompensere fullt ut for temperaturavhengigheten til emissiviteten, men vi velger i praksis å anta $\varepsilon = 0,85$ i våre analyser. Ved repetisjon av kalibreringsforsøket varierte resultatene i samme størrelsesorden som de målte avvikene i Figur 3.8, og derfor betrakter vi heller ± 10 °C som en måleusikkerhet i opptakene våre.



Figur 3.8 Målt avvik i temperatur mellom termoelement og IR-kameraet under antagelse av ulike verdier av emissivitet til referansebelegget. Innsatt bilde viser prøven med kontaktproben og emissivitetsreferansen som ble brukt til temperaturmålingen.

3.4.2.4 Dynamisk respons til emissivitetsreferansen

Ved temperaturendringer på prøveoverflaten vil tidsforsinkelsen i varmetransporten gjennom referansebelegget gi et visst avvik mellom temperaturen på selve prøven og på overflaten til referansebelegget. Hvis vi tenker oss et aktuelt scenario hvor temperaturen til prøven øker kontinuerlig og (for enkelthets skyld) med en konstant rate R , er det klart temperaturen på referansebelegget vil være noe lavere enn prøven til enhver tid. Denne forskjellen kan vi finne ved å løse den endimensjonale varmeledningslikningen

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

Under den nevnte antagelsen $\frac{\partial T}{\partial t} = R$ reduseres problemet til en andreordens ordinær differensiallikning som løses enkelt ved integrasjon to ganger. Vi definerer temperaturen på prøveoverflaten som T_0 , og vi antar at overflaten til referansebelegget er termisk isolert. Dette tilsvarer randbetingelsene $T(0) = T_0$ og $\frac{dT(d)}{dz} = 0$, hvor d er tykkelsen til belegget. Samlet gir dette følgende stasjonære løsning for temperaturfordelingen gjennom referansebelegget:

$$T(z) = \frac{Rz}{\chi} \left(\frac{z}{2} - d \right) + T_0.$$

Temperaturforskjellen mellom prøveoverflaten og overflaten til referansebelegget er dermed gitt ved

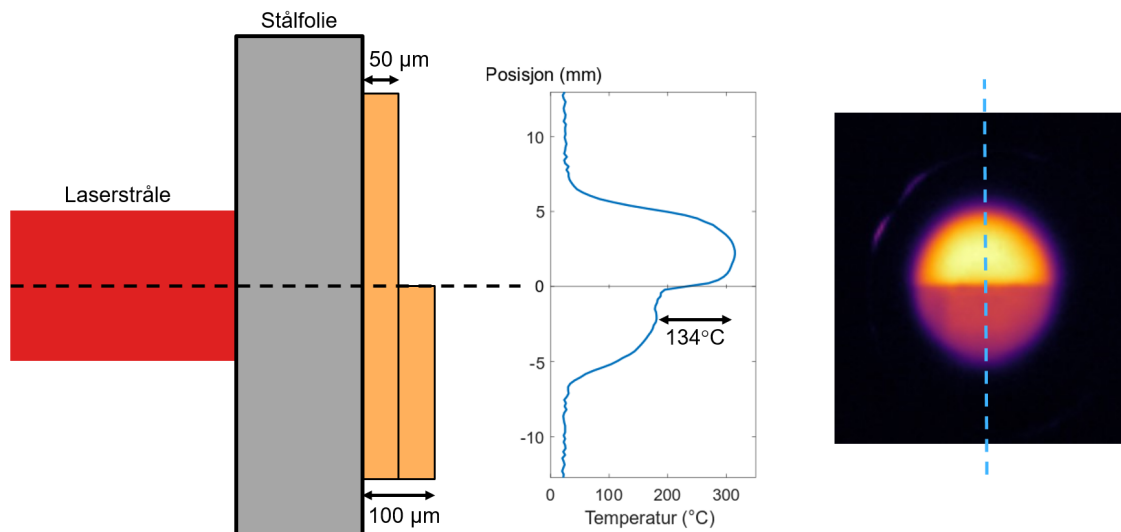
$$T(0) - T(d) = \frac{Rd^2}{2\chi}.$$

Her er diffusjonskonstanten til referansebelegget den eneste ukjente parameteren siden d er bestemt fra påføringsprosessen, og R kan bestemmes fra måleopptakene til enhver belysningstest.

For emissivitetsreferansen vi bruker er varmeledningsevnen oppgitt i databladet som $\kappa = 2,16 \text{ W/K}\cdot\text{m}$, mens tettheten og varmekapasiteten som inngår i $\chi = \kappa/(\rho c_p)$ er ukjente. Vi har derfor gjennomført et forsøk for å bestemme χ eksperimentelt ved å studere temperaturforskjellen mellom to referanselag med ulike tykkelser. Hvis vi for en bestemt oppvarmingsrate R ser på to referansebelegg med tykkelser på henholdsvis d og $2d$, vil differansen i overflatetemperatur på disse være $\Delta T = 3Rd^2/(2\chi)$. Altså kan vi finne diffusjonskonstanten fra

$$\chi = \frac{3Rd^2}{2\Delta T}.$$

Figur 3.9 illustrerer dette eksperimentelle konseptet og viser resultater fra forsøket. Baksiden av en rustfri stålplate ble delt i to seksjoner med henholdsvis ett og to lag med emissivitetsreferansebelegg. Prøven ble plassert slik at overgangen mellom seksjonene traff midt i en laserstråle med diameter på 10 mm. Deretter ble temperaturforløpet målt gjennom et belysningsforsøk med laseren stilt til 1700 W. Vi brukte en tynn stålplate (0,1 mm) for å oppnå en rask temperaturøkning og dermed en tydelig målbar temperaturforskjell i områdene med enkelt og dobbelt referansebelegg. Vi



Figur 3.9 Oppsett for belysning av en plate med to ulike tykkelser av emissivitetsreferansebelegg. Målt temperaturtverrsnitt gjennom sentrum av strålen vises i midten, og tilhørende IR-bilde fra forsøket vises til høyre.

målte en oppvarmingsrate på $\sim 15\,200 \text{ }^\circ\text{C/s}$ og temperaturforskjellen i områdene med ett og to lag var $\Delta T = 134 \text{ }^\circ\text{C}$. Vi finner dermed at diffusjonskonstanten for referansebelegget er $0,43 \text{ mm}^2/\text{s}$. Belegget består i hovedsak av alumina som i ren form har en betydelig høyere diffusjonskonstant på $8,6 \text{ mm}^2/\text{s}$. Vi antar at avvikene fra våre målinger skyldes at aluminaet er i partikkelform i limet i tillegg til et ukjent innhold av andre materialer og bindemidler.

Når diffusjonskonstanten til emissivitetsreferansen er kjent, er det mulig å inkludere belegget eksplisitt i termiske modeller for temperaturutvikling i spesifikke belysningsforsøk. I praksis ser vi

derimot at oppvarmingsraten i de fleste aktuelle situasjoner er så langsom at vi trygt kan se helt bort fra dynamikken til referansebelegget. For eksempel vil en forholdsvis høy oppvarmingsrate på 1000 °C/s bare gi et temperaturavvik mellom prøveoverflaten og referansebelegget på $Rd^2/(2\chi) = 2.9$ °C.

3.5 Parameteroversikt fra målekampanje

I tabell 3.1 har vi listet alle 62 kjøringene som ble gjennomført 23 mai 2023. Bortsett fra de første fire testkjøringene, kommer vi til å simulere alle de andre 58 kjøringene. Kjøringene ble utført med 15 forskjellige materialprøver. Fire materialprøver består av stål med forskjellige overflatebehandlinger: (i) ubehandlet, (ii) brennlakkert (med et 79 µm tykt lag) (iii) Zn-plettert og (iv) Ni-plettert. Fem materialprøver består av aluminium med forskjellige overflatebehandlinger: (i) ubehandlet, (ii) gul eloksert, (iii) hardanodisert, (iv) svart eloksert og (v) passivert (Surtec). Videre har vi materialprøver bestående av ubehandlet titan og ubehandlet messing. De siste fire materialprøvene består av karbonfibre med resin og kommer i tre forskjellige tykkelser. Alle materialprøver ble bestrålt med strålediameter på både 5 mm og 15 mm og stort sett med to lasereffekter for hver diameter (typisk 1,7 og 0,85 kW ved 15 mm strålediameter og 0,85 og 0,425 kW ved 5 mm strålediameter). Noen materialprøver ble bestrålt med tre effekter for én av de to strålediameterene, mens karbonfiberplatene med 3 og 5 mm tykkelse ble bare bestrålt med én effekt per strålediameter.

I figur 3.10 viser vi bilder av alle de 15 materialprøvene etter bestråling. Her kan man få et inntrykk av de forskjellige overflatebehandlingene og hvordan disse blir påvirket av oppvarmingen. Videre er alle kjøringene markert på materialprøvene med svart tusj. Sammen med kommentarene fra tabell 3.1 kan man danne seg et ganske utfyllende bilde over alle kjøringene.

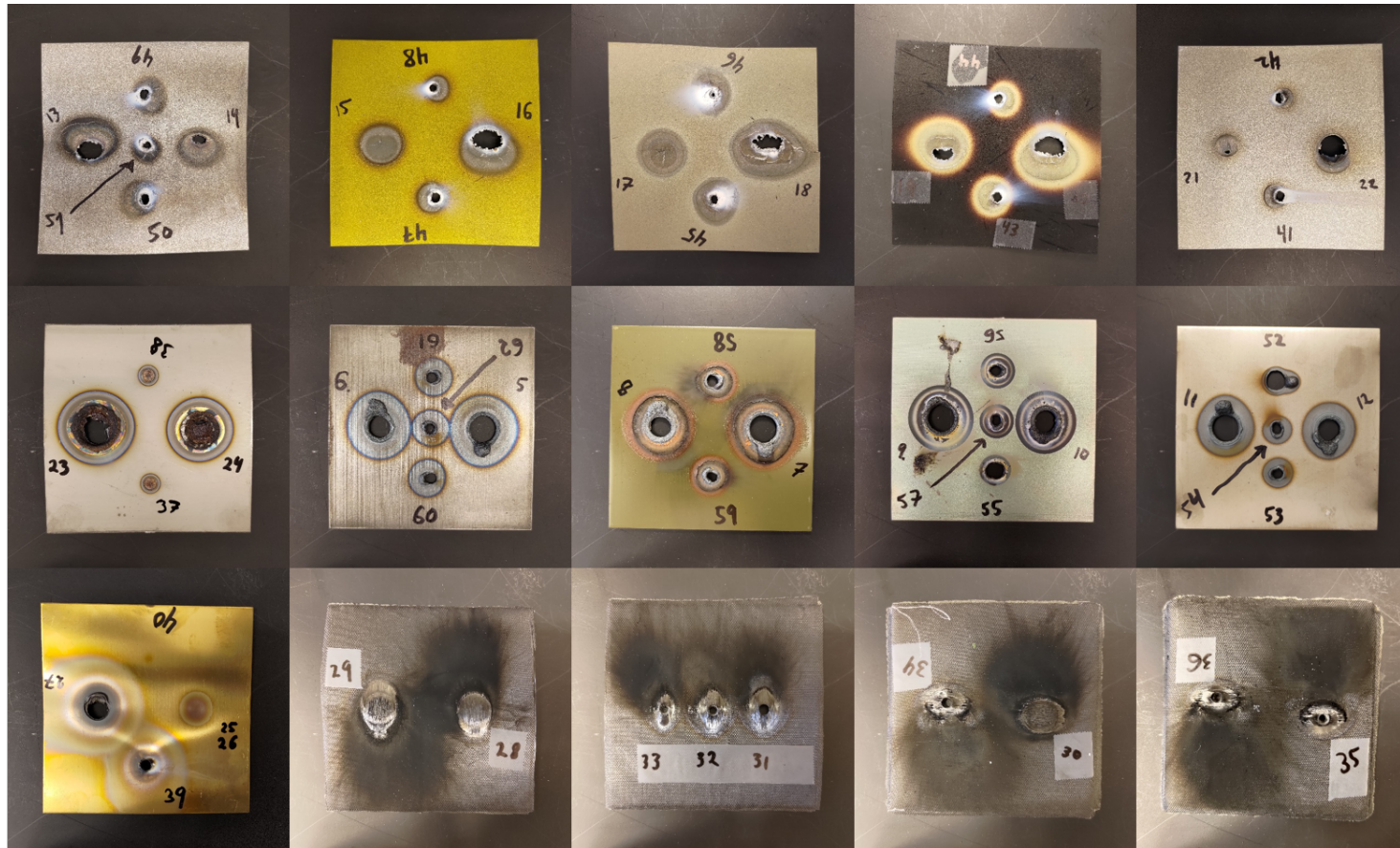
kj. #	materiale	plate		laser					kommentar
		<i>d</i>	overflate	T_d	T_m	D	P	T_s	
1	platestål	2	ubehandlet	1	11	15	1700	7,1	pretest
2	platestål	2	ubehandlet	1	11	15	850	x	pretest
3	platestål	2	ubehandlet	1	11	15	1700	6,6	pretest
4	platestål	2	ubehandlet	1	11	15	500	x	pretest
5	stål	1	ubehandlet	1	11	15	1700	1,3	
6	stål	1	ubehandlet	1	11	15	850	3,8	
7	stål	1	brennlakkert	1	11	15	1700	1,67	røykutvikling
8	stål	1	brennlakkert	1	11	15	850	3,68	lakk nærmest eksploderer, røykutvikling
9	stål	1	Zn-plettert	1	11	15	1700	1,86	ringer rundt hullet med skarp avgrensing ytterst
10	stål	1	Zn-plettert	1	11	15	850	4,8	
11	stål	1	Ni-plettert	1	11	15	1700	1,6	
12	stål	1	Ni-plettert	1	11	15	850	4,32	
13	Al	1	ubehandlet	1	11	15	1700	1,76	plata bøyer seg kraftig, dråpeforming
14	Al	1	ubehandlet	1	11	15	850	7	stor dråpeforming
15	Al	1	gul eloksert	1	11	15	850	x	smeltet etter 2–3 s, henger i en pose med oksid
16	Al	1	gul eloksert	1	11	15	1700	1,55	
17	Al	1	hardanodisert	1	11	15	850	x	smeltet etter 2–3 s
18	Al	1	hardanodisert	1	11	15	1700	1,73	plata revnet ut til kanten
19	Al	1	svart eloksert	1	11	15	850	9,7	fargen forsvinner
20	Al	1	svart eloksert	1	11	15	1700	1,52	fargen forsvinner
21	Al	1	passivert	1	11	15	850	9,6	lite hull
22	Al	1	passivert	1	11	15	1700	1,76	
23	Ti	1	ubehandlet	1	11	15	1700	3,88	stor flammeutvikling
24	Ti	1	ubehandlet	1	11	15	850	x	ingen gjennombrenning, hull oppstår under nedkjøling
25	messing	1	ubehandlet	1	11	15	850	x	ingen tegn til endringer, brukes igjen til neste kjøring

kj. #	plate		laser					kommentar	
	materiale	d	overflate	T_d	T_m	D	P		T_s
26	messing	1	ubehandlet	1	11	15	1700	x	endringen kommer helt på slutten
27	messing	1	ubehandlet	1	16	15	1700	11,8	
28	karbon	1	ubehandlet	1	11	15	850	x	
29	karbon	1	ubehandlet	1	11	15	1700	x	
30	karbon	3	ubehandlet	1	11	15	1700	x	
31	karbon	1	ubehandlet	1	11	5	1700	0,64	pent rettvegga hull
32	karbon	1	ubehandlet	1	11	5	850	2,27	pent rettvegga hull
33	karbon	1	ubehandlet	1	11	5	425	x	nesten gjennombrenning
34	karbon	3	ubehandlet	1	11	5	1700	3,01	
35	karbon	5	ubehandlet	1	11	5	1700	6,54	
36	karbon	5	ubehandlet	1	12	5	1000	x	ikke gjennombrenning, strålen fordamper materialet
37	Ti	1	ubehandlet	1	11	5	1700	x	
38	Ti	1	ubehandlet	1	11	5	1700	x	
39	messing	1	ubehandlet	1	11	5	1700	2,38	
40	messing	1	ubehandlet	1	11	5	850	x	
41	Al	1	passivert	1	11	5	1700	0,34	røyk gikk opp langs plata
42	Al	1	passivert	1	11	5	850	1,75	
43	Al	1	svart eloksert	1	11	5	1700	0,28	
44	Al	1	svart eloksert	1	11	5	850	1,76	
45	Al	1	hardanodisert	1	11	5	1700	0,2	
46	Al	1	hardanodisert	1	11	5	850	0,88	lite hull som tetter seg og åpner seg igjen etter 3,95 s
47	Al	1	gul eloksert	1	11	5	1700	0,26	
48	Al	1	gul eloksert	1	11	5	850	2,46	
49	Al	1	ubehandlet	1	11	5	1700	0,26	
50	Al	1	ubehandlet	1	11	5	1700	0,3	

testet med samme effekt som forrige ved en feil

kj. #	materiale	plate		laser					kommentar
		d	overflate	T_d	T_m	D	P	T_s	
51	Al	1	ubehandlet	1	11	5	850	1,69	lite hull som tetter seg og åpner seg igjen etter 2 s
52	stål	1	Ni-plettert	1	11	5	1700	0,38	
53	stål	1	Ni-plettert	1	11	5	850	0,72	
54	stål	1	Ni-plettert	1	11	5	475	3,32	
55	stål	1	Zn-plettert	1	11	5	1700	1,61	
56	stål	1	Zn-plettert	1	11	5	850	0,89	raskere gjennombrenning enn forrige
57	stål	1	Zn-plettert	1	11	5	425	2,42	
58	stål	1	brennlakkert	1	11	5	850	3	
59	stål	1	brennlakkert	1	11	5	425	3,28	
60	stål	1	ubehandlet	1	11	5	1700	0,37	
61	stål	1	ubehandlet	1	11	5	850	0,83	
62	stål	1	ubehandlet	1	11	5	425	2,18	

Tabell 3.1 Liste med kjøring. Materialprøvene er karakterisert ved type materiale, platetykkelse d i (mm) og overflatebehandling. Karbonplaten med nominell 3 mm tykkelse varierer mellom 2,99 og 3,12 mm i tykkelse – karbonplaten med nominell 5 mm tykkelse varierer mellom 5,16 og 5,32 mm i tykkelse. Laserbestrålingen i tid er karakterisert ved forsinkelsen T_d i (s) mellom starten av opptak og starten av laserbestråling, den forhåndsinnstilte maksimaltiden T_m i (s) for bestrålingen og den faktiske bestrålingstiden T_s i (s) til laseren brant seg gjennom platen slikt at lysdetektoren på baksiden av platen stoppet forsøket. Her betyr (x) at laseren ikke brant seg gjennom platen eller forsøket ble stoppet av feedbackdetektoren, eller at et hull åpnet seg, men først etter at bestrålingen var avsluttet. Ellers er laserstrålen karakterisert ved dens strålediameter D i (mm) og dens effekt P i (W). Hvis noe utenom det vanlige har skjedd under en kjøring så er det kommentert i siste kolonne.



Figur 3.10 Bilder av alle materialprøver etter bestråling. Tallene i bildene henviser til de enkelte kjøringene. Fra høyre til venstre har vi øverst: Al (ubehandlet), Al (gul eloksert), Al (hardanodisert), Al (svart eloksert), Al (passivert), i midten: Ti (ubehandlet), stål (ubehandlet), stål (brennlakkert), stål (Zn-plettert), stål (Ni-plettert), og nederst: messing, karbonfiber (1 mm), karbonfiber (1 mm), karbonfiber (3 mm), karbonfiber (5 mm).

4 Resultater

Som beskrevet i kapittel 3, har vi gjennomført 62 kjøringene med temperaturmåling under laserbestråling. Bortsett fra de første fire testkjøringene har vi simulert alle disse kjøringene med den teoretiske modellen beskrevet i kapittel 2, uansett om de var vellykket eller ikke. Vi skal i det følgende sammenlikne eksperimentelle målinger med teorien. Fra kapittel 2 husker vi også at for å beskrive oppvarming til et materiale, så må vi kjenne en del fysikalske parametere. Spesielt viktig er diffusjonskonstanten for temperatur χ og produktet av tettheten ρ med den spesifikke varmekapasiteten per masse ved konstant trykk c_p . Varmeledningskonstanten κ er produktet til alle de tre tallene (med de enhetene som er gitt i tabell 4.1) og brukes gjerne istedenfor χ i tabellverk. Mens verdiene for tetthet og varmekapasitet er ganske like, finner man en betydelig variasjon av verdier for varmeledningskonstanten og diffusjonskonstanten for forskjellige legeringer. Det er derfor viktig å bruke verdier for akkurat den legeringen som er brukt i eksperimentene. Legeringene er spesifisert i rapporten 2168761 “Testplan – Skadetesting” fra Nammo ved Gerd Åshild Thingbø fra 12 mai 2023 og vi gjengir spesifikasjonene i tabell 4.1. Materialparameterne for disse spesielle legeringene blir så funnet på websiden <https://matweb.com> (oppsøkt 21 august 2023) og verdiene derfra er samlet i tabell 4.1. Dessverre er ikke karbonplatene spesifisert. I karbon har alle tre størrelser ρ , c_p og κ en betydelig temperaturavhengighet og varmeledningsevnen til for eksempel grafitt til og med har en veldig stor anisotropi (grafitt leder varme veldig bra i planet, men uhyre dårlig vinkelrett på planet med karbonheksagonene). Karbonplatene som er brukt i eksperimentet består ikke av ren karbon eller grafitt – de består av karbonfibere med resin imellom. Verdien for varmeledningsevnen til disse platene er derfor egentlig mer et estimat enn en kjent verdi.

materiale	legering	χ $\left[\frac{\text{mm}^2}{\text{s}} \right]$	ρ $\left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right]$	c_p $\left[\frac{\text{J}}{\text{g}\cdot\text{K}} \right]$	κ $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}} \right]$
stål	Impax Supreme	8,1	7,81	0,46	29
Al	7075-T651	48	2,81	0,96	130
Ti	gr. 5	2,9	4,43	0,526	6,7
messing	CuZn20	42	8,67	0,38	140
karbon		10	2,26	0,72	16

Tabell 4.1 Materialparametere brukt i simulering. Siste spalte er produktet av de tre forrige og er tabellverdien som brukes for å beregne χ . I tabellverk er det nemlig stort sett gitt varmeledningskonstanten κ , ikke diffusjonskonstanten for temperatur χ .

Den aller viktigste parameteren for simuleringen er andelen A av laserlyset som faktisk blir absorbert, det vil si strålingsakseptansen (absorpsjonslengden blir antatt lik null, det vil si vi antar at all absorpsjon skjer i et forsvinnende tynt lag på forsiden av legemet, og den inverse absorpsjonslengden α blir ∞). Det er også grunnen for at vi har materialprøver av stål og aluminium med forskjellige overflatebehandlinger. Spesielt interessant for oss er spørsmålet om en reflektansmåling ved lav effekt gir en brukbar verdi for (i) strålingsakseptansen ved høy effekt og (ii) en representativ verdi for en potensielt temperaturavhengig strålingsakseptans under oppvarming. For dette har Ørnulf Nordseth ved IFE/Sunphade utført reflektansmålinger av materialprøvene. Det viste seg fort at de tilsvarende verdier for strålingsakseptans $A = 100\% - R$ ikke førte til simuleringer av oppvarmingen i samsvar med temperaturmålingene. Vi justerte derfor strålingsakseptansen opp eller ned etter behov til vi fikk noenlunde samsvar mellom simuleringen og temperaturmålingen. Verdiene for

materialprøve	100% – R (målt)	A [%] (brukt)
stål, ubehandlet	63,5	30
stål, brennlakkert	89,7	33
stål, Zn-plettert	55,9	26
stål, Ni-plettert	23,1	26
Al, ubehandlet	58,8	33
Al, gul eloksert	62,1	36
Al, hardanodisert	68,3	38
Al, svart eloksert	61,1	40
Al, passivert (Surtec)	36,7	25
Ti, ubehandlet	40,8	20
messing	13,6	6,7
karbon	90,8	6

Tabell 4.2 Strålingsakseptans ved 915 nm målt av Ørnulf Nordseth fra IFE/Sunphade (midterste kolonne) og brukt i simulering (høyre kolonne). Mye tyder på at overflatebehandlingen forsvinner veldig fort (se også kommentarene i tabell 3.1) og at man får en ganske lik strålingsakseptans for et materiale uansett belegg – rundt 30–40% for stål og aluminium. I tilfellet med karbon kan ablasjon bruke opp mye av den absorberte effekten, slik at bare en liten brøkdel av absorbert effekt er tilgjengelig for oppvarming. Dette kan muligens forklare den ufattelig lave strålingsakseptansen (i forhold til reflektansmålingen) som gir simuleringer i noenlunde samsvar med eksperiment.

strålingsakseptans fra reflektansmålinger og verdiene som faktisk blir brukt i simuleringen er gjengitt i tabell 4.2.

For å tolke sammenlikningen av temperaturmålingene med modellen må vi også si noe om gyldighetsområdet til modellen. I modellen antar vi at en konstant brøkdel av en konstant lasereffekt blir absorbert og blir brukt til å varme opp en plate med uendelig radiell utstrekning, konstant tetthet, varmekapasitet og varmeledningsevne. Modellen tar ikke høyde for smelting, ablasjon eller liknende prosesser. I realiteten er hverken strålingsakseptans, tetthet, varmekapasitet eller varmeledningsevne helt uavhengig av temperatur. I tillegg, for å skape et hull slikt at laserstrålen trenger gjennom platen, så må platen enten smelte delvis eller strålen må brenne seg gjennom platen på en eller annen måte, for eksempel ved ablasjon. Først etter at et hull danner seg og strålen treffer detektoren på den andre siden av platen blir kjøringen stoppet (med mindre den forhåndsinnstilte maksimaltiden er nådd eller det er for mye feedback av lys tilbake inn i fiberen). Derfor er det åpenbart at simuleringen på ingen måte er egnet til å beskrive hele prosessen. I praksis betyr det at simuleringen *i beste fall* kan beskrive oppvarmingen til det tidspunktet der *forsiden* av legemet begynner å smelte. Under smeltingen brukes nemlig en signifikant brøkdel av strålingseffekten på smeltevarme. Dermed er det derfra og utover ikke like mye effekt tilgjengelig for videre oppvarming av platen. I temperaturmålingene ser man ved dette tidspunktet ofte en liten knekk. Væskefasen som dannes kommer heller ikke til å ha de samme verdiene for strålingsakseptans, tetthet, varmekapasitet eller varmeledningsevne (her kommer konveksjon til å spille en stor rolle) som den faste fasen, som er den vi ønsker å beskrive. Dermed blir all sammenlikning av modellen med målingen meningsløs etter den første knekken i temperaturkurven. Vi kommer derfor i det følgende til å fokusere kun på

dataene *før* den første knekken.

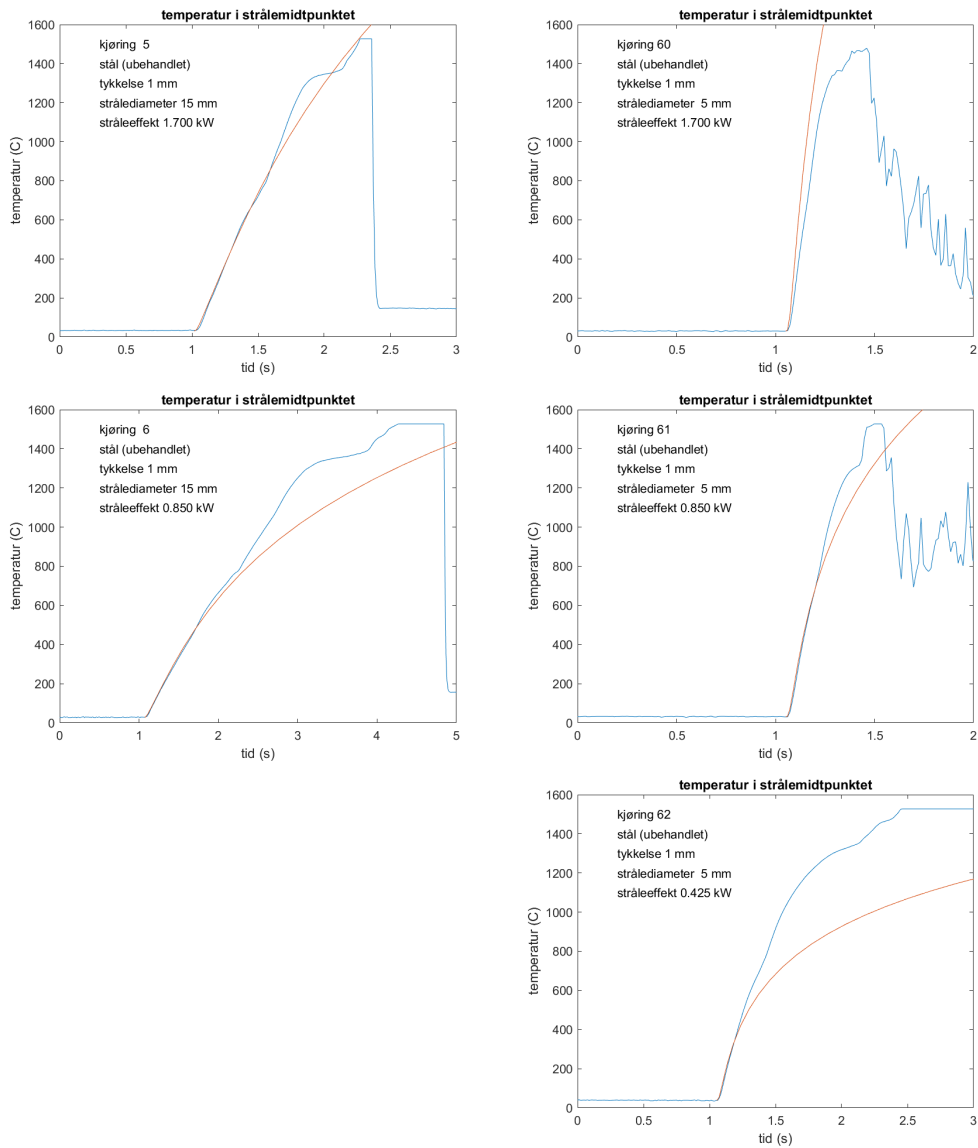
4.1 Tidsrekker

I første omgang sammenlikner vi temperaturmålingen på baksiden av plata i strålemidtpunktet med simuleringen som funksjon av tid. Vi har sortert grafene slikt at alle kjøringene med samme materialprøve havner i samme figur. Kjøringene med 15 mm strålediameter vises i venstre kolonne av figurene, og kjøringene med 5 mm strålediameter vises i høyre kolonne. Lasereffekten er avtakende fra topp til bunn i en figur. Kjøringene som vises i samme rad ble utført med samme lasereffekt. I tillegg samler vi alle kjøringene med stål og aluminium i etterfølgende figurer. Simuleringen er alltid gitt ved en glatt, rød kurve mens målingen er gitt ved en blå linje som ofte viser en del knekk og fluktasjoner. Laseren skulle egentlig slå seg på med en tidsforsinkelse på 1 s etter at temperaturmålingen ble satt i gang. Når vi tegner simuleringen med en forskyvning på 1 s i forhold til temperaturmålingen så ser vi derimot at simuleringen ofte ligger litt i forkant for målingen. Vi har derfor prøvd å opplinjere kurvene slik at temperaturøkningen i målekurven og simuleringen begynner omtrent samtidig. Denne korreksjonen overskrider aldri noen tideler av et sekund.

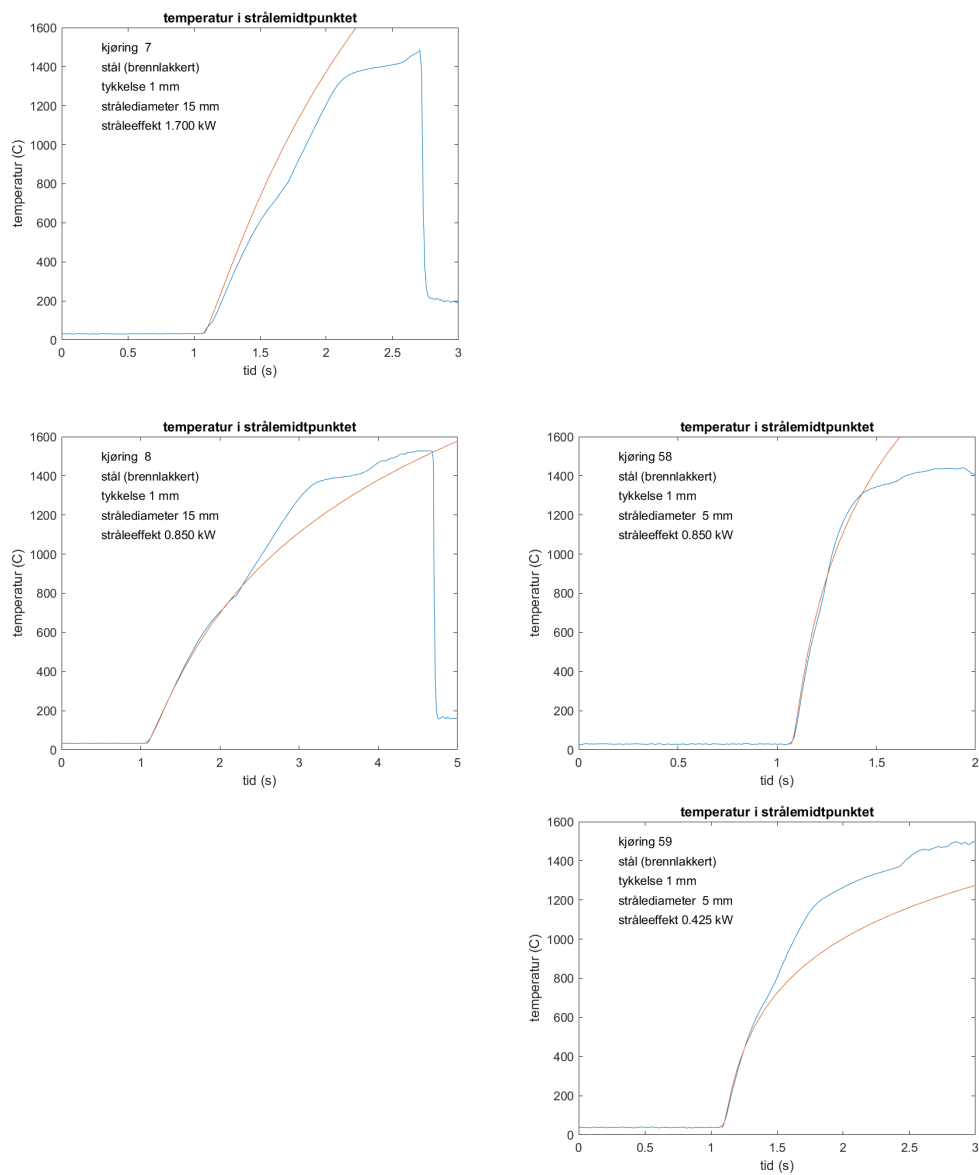
Temperaturmålingen har en øvre grense på 1500 °C, det vil si at når temperaturen blir høyere enn det, så registreres det ikke som mer enn denne maksimaltemperaturen. Det er ikke noe stort problem siden materialene smelter ved 500–600°C (Al), ~ 980°C (messing), ~ 1450°C (stål) og ~ 1630°C (Ti), som betyr at før maksimaltemperaturen er nådd på *baksiden* av legemet, så har smelteprosessen på *forsiden* begynt for lengst og modellen er utenfor sitt gyldighetsområde. For karbonplaten er det heller ikke så relevant siden vi kommer til å se at i dette tilfellet blir mye av absorbert effekt brukt opp til ablasjon og at modellen derfor ikke er i stand til å gi en god beskrivelse av oppvarmingen.

Etter at et hull danner seg og laserstrålen slår seg av fortsetter opptak av temperaturmålingen. Ofte ser man et stort fall av den målte temperaturen eller så ser man en veldig fluktuerende temperaturkurve. Den delen av målingen blir derfor fullstendig irrelevant å sammenlikne med. Vi nevner det her siden den delen av kurven vises i noen av grafene.

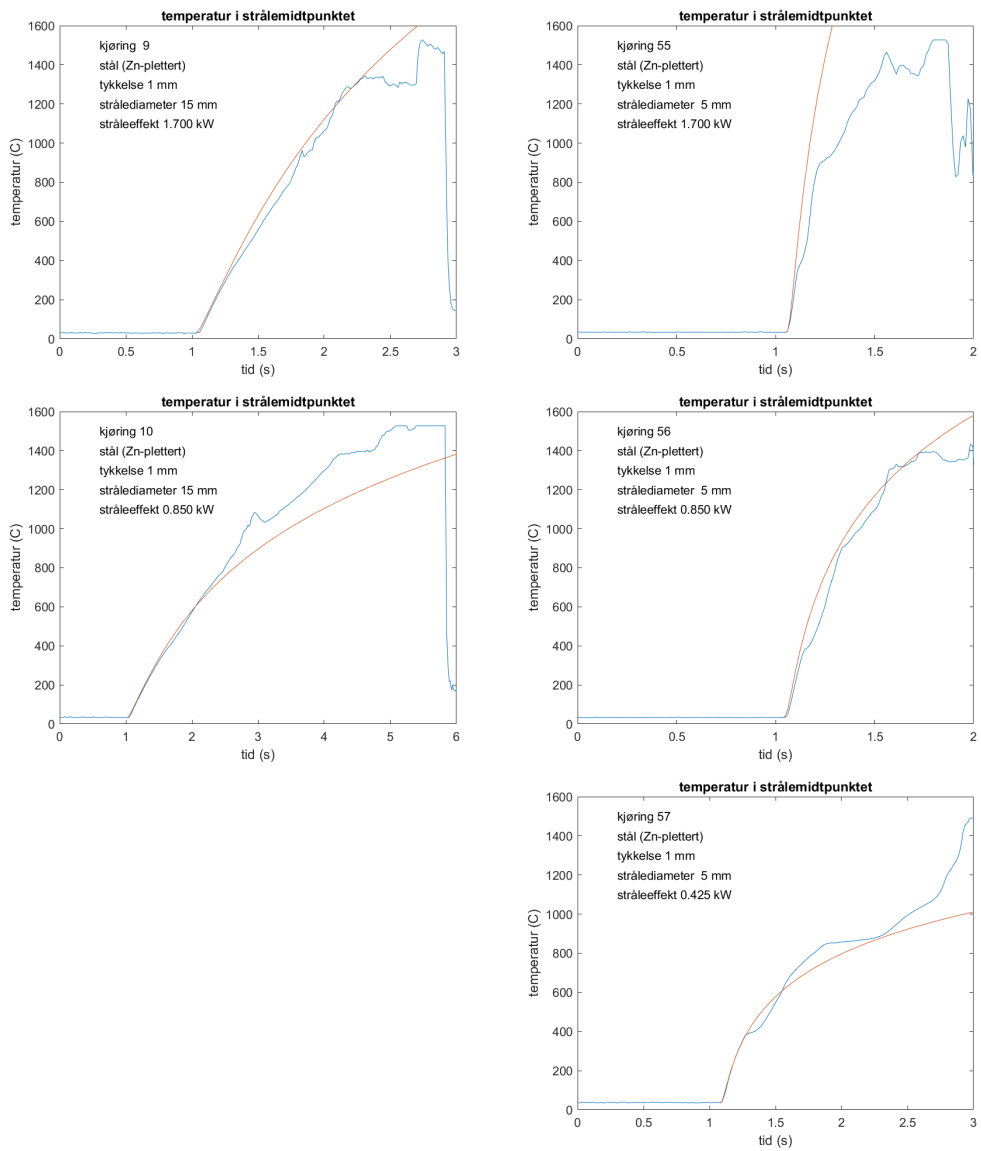
Litt mer detaljerte diskusjoner av de enkelte resultatene og simuleringene er gitt i figurtekstene.



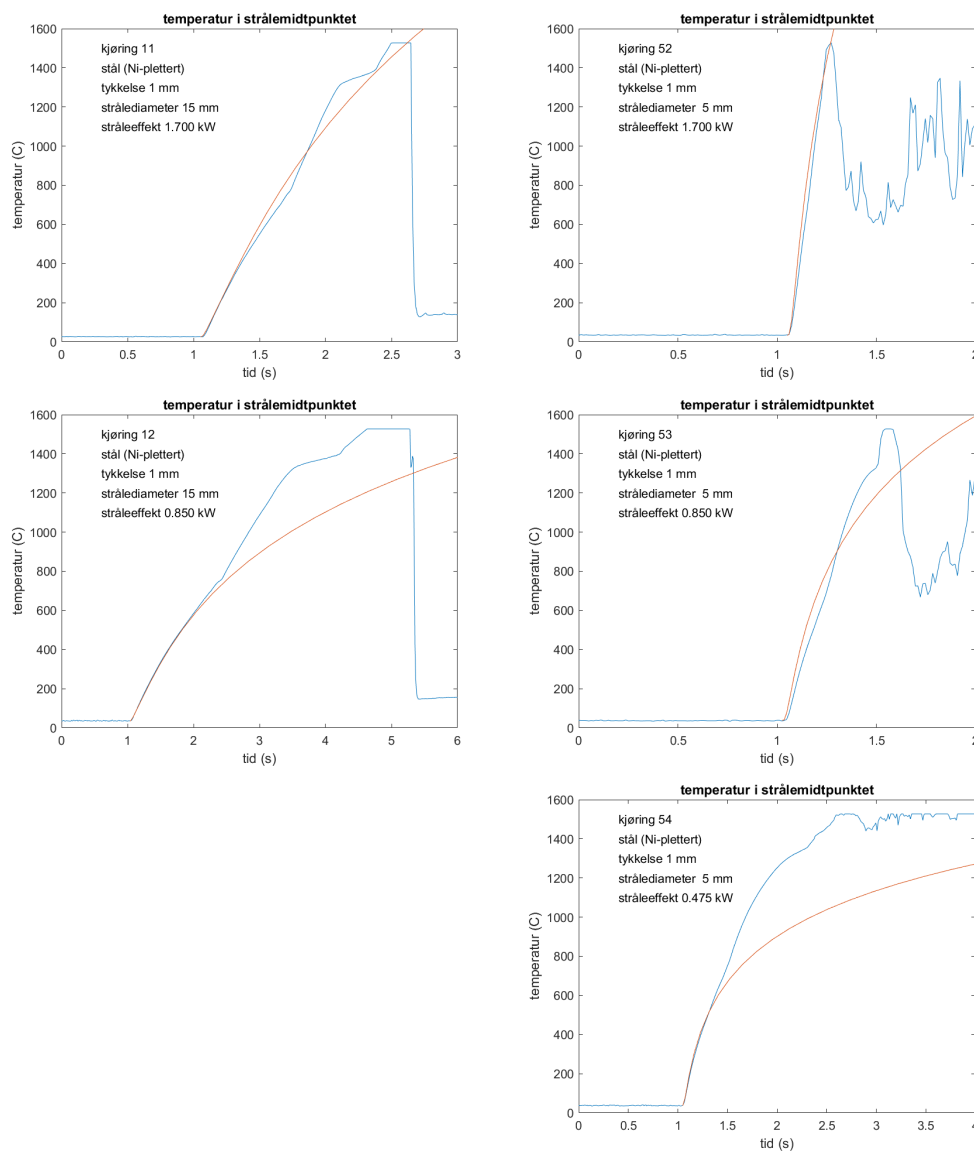
Figur 4.1 Ubehandlet stål. Simuleringen beskriver alle tilfeller noenlunde bra opp til den første knekken i kurvene som muligens indikerer smeltingen av forsiden av platen. Den brukte strålingsakseptansen er kun litt under halvparten av forventningen fra reflektansmålingen.



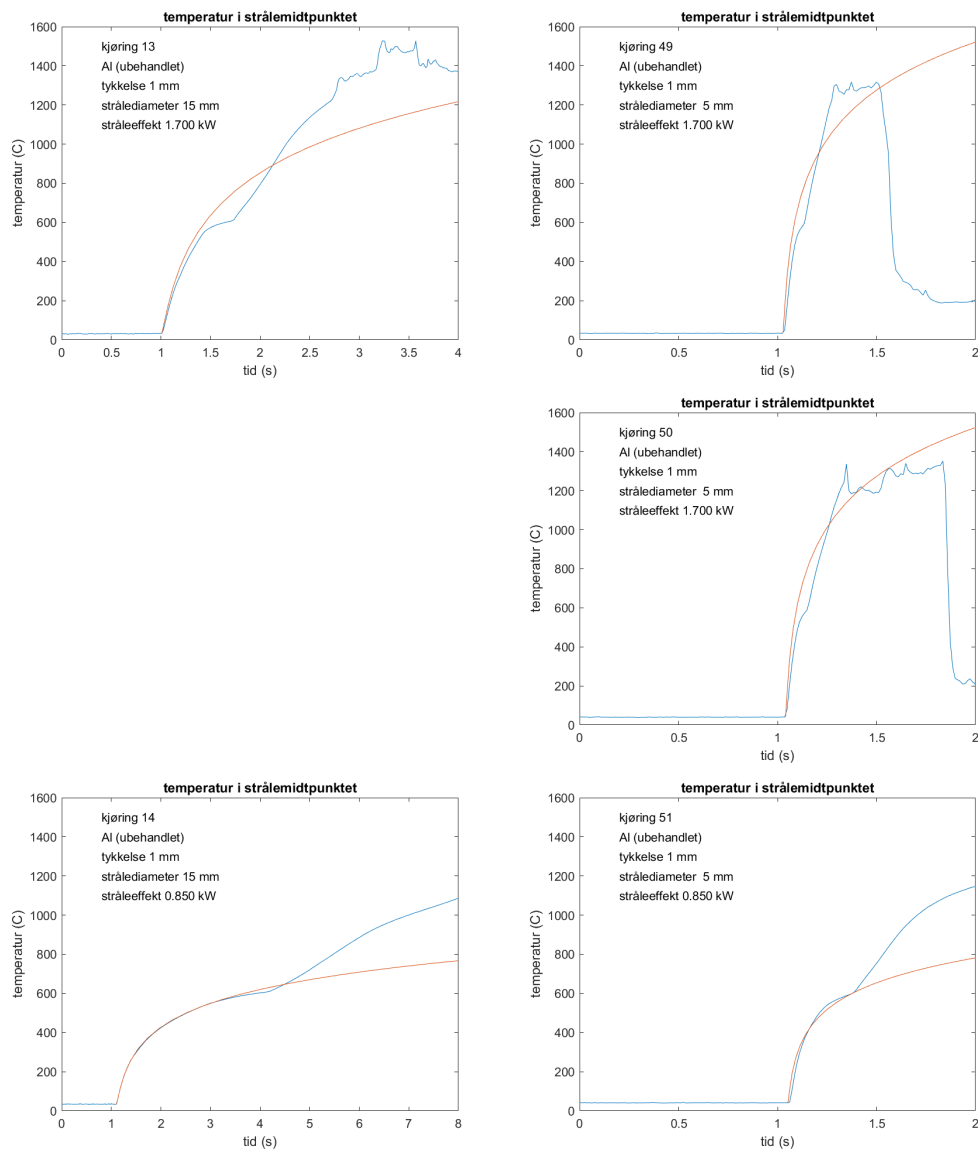
Figur 4.2 Brennlakkert stål. Også her beskriver simuleringen alle tilfeller ganske bra opp til den første knekken i kurvene. Brukt strålingsakseptans er under 40% av forventningen fra reflektansmålingen. Laget med lakken (som kun er 79 μm tykk) brenner fort opp (se kommentarer i tabell 3.1).



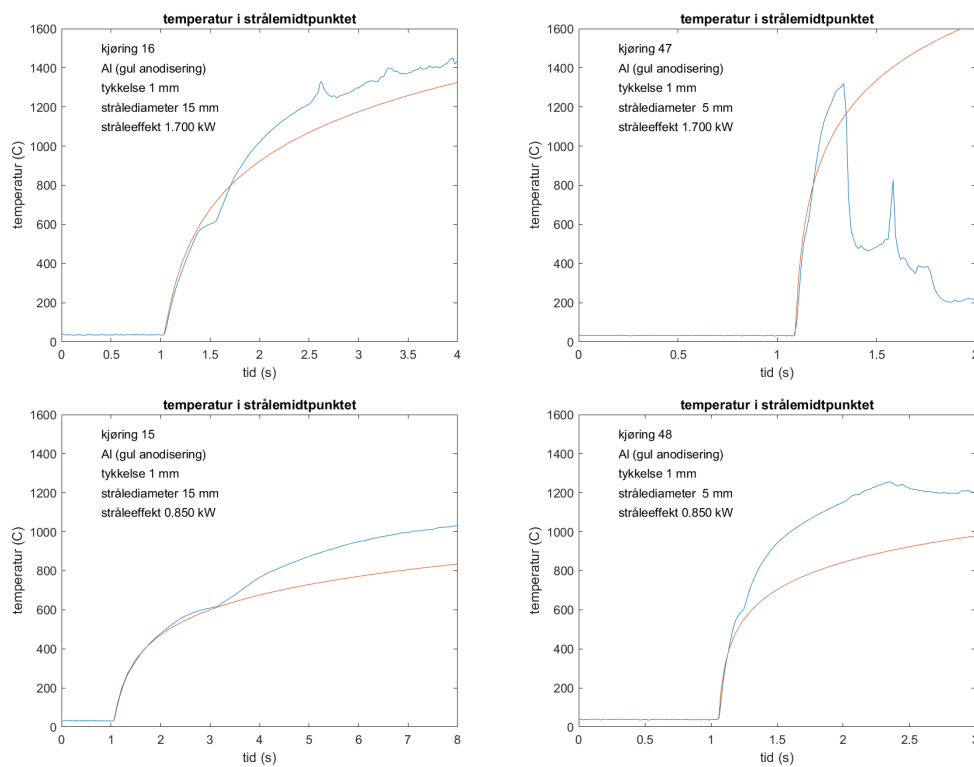
Figur 4.3 Zn-plettert stål. Også her beskriver simuleringen alle tilfeller veldig bra, i hvert fall opp til den første knekken i kurvene (som er mest tydelig i kjøringene med 5 mm strålediameter). Også her er brukt strålingsakseptans under halvparten av forventningen fra reflektansmålingen. At kjøringen med 850 W (for 5 mm strålediameter) stoppet før tilsvarende kjøring med 1700 W (se kommentar i tabell 3.1) kan muligens forklares ved at smelten oppførte seg annerledes slikt at hullet åpnet seg fortere. Kurvene opptil den første knekken har i hvert fall stigning som korrelerer med stråleeffekt.



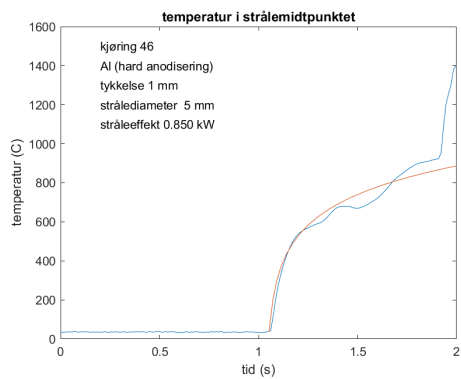
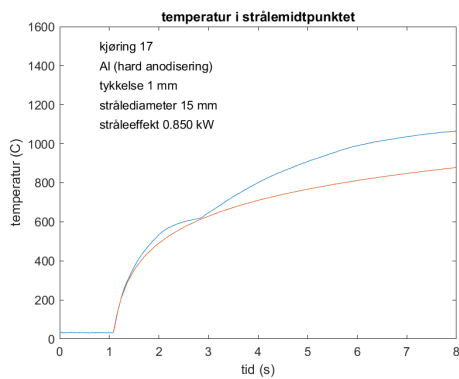
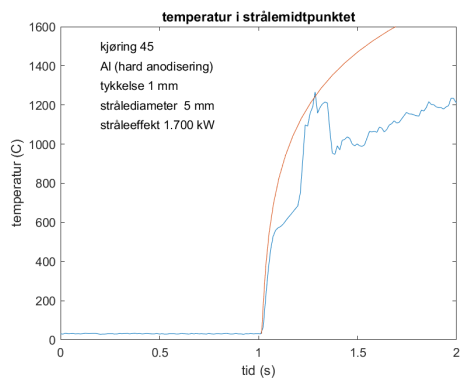
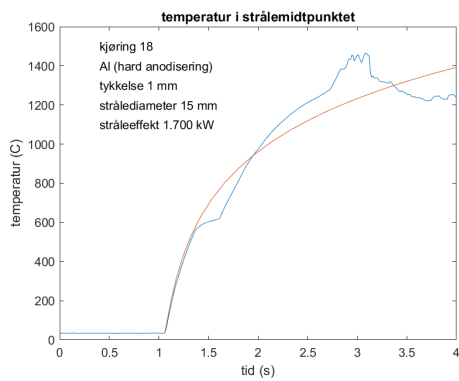
Figur 4.4 Ni-plettet stål. Også her beskriver simuleringen alle tilfeller nokså bra frem til den første knekken i kurvene. Dette er det eneste tilfellet der vi bruker en strålingsakseptans som er større enn forventningen fra reflektansmålingen (se tabell 4.2). På den andre siden er brukt verdi helt lik den for Zn-plettet stål. Dette tyder på at pletteringen sannsynligvis ikke har noe å si for oppvarmingen ved laserbestråling.



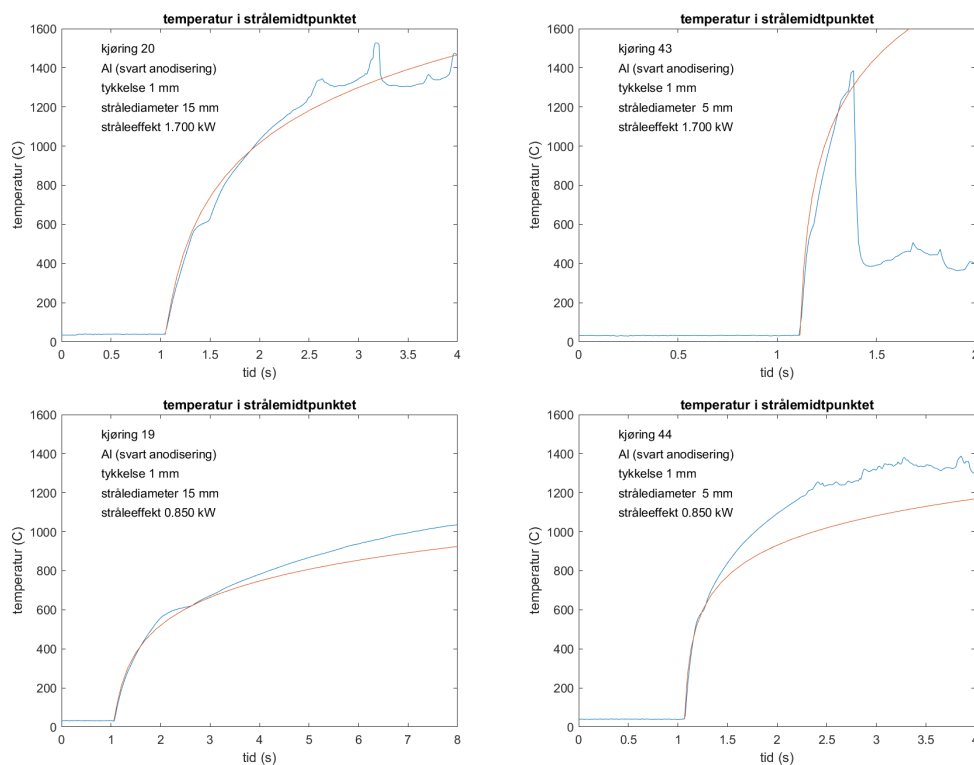
Figur 4.5 Ubehandlet aluminium. Avvik mellom måling og simulering skyldes mest sannsynlig temperaturavhengig strålingsakseptans. Man ser at oppvarmingen først overestimeres litt og så underestimeres den av simuleringen. Det tyder på at strålingsakseptans øker med temperaturen slik at den konstante (gjennomsnittlige) verdien som vi bruker i simuleringen overestimerer den faktiske verdien ved lave temperaturer og underestimerer den ved høye temperaturer. Det som kan tale imot denne forklaringen er at den brukte verdien for strålingsakseptans ligger rundt 45% under forventningen fra reflektansmålingen (ved romtemperatur). Ved en feil ble det utført to målinger ved 1700 W effekt og 5 mm strålediameter.



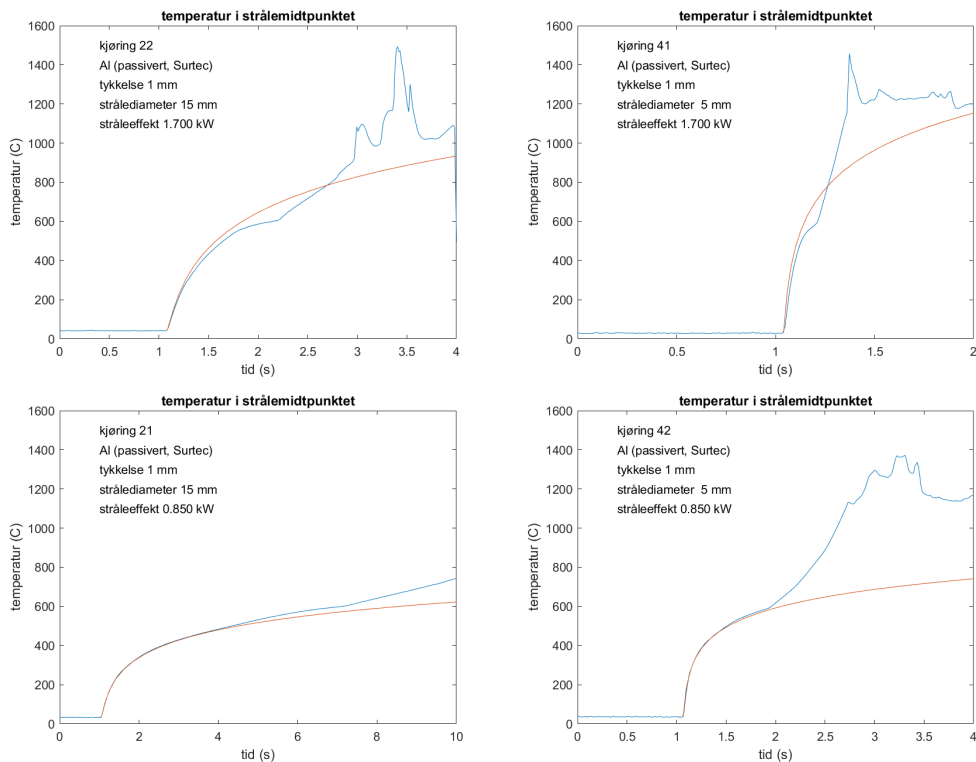
Figur 4.6 Gul eloksert aluminium. Her ser vi litt av den samme effekten som for ubehandlet aluminium (se figur 4.5), nemlig at simuleringen først gir en litt for brå kurve som så flater ut for mye. Men også her er det brukt verdi for strålingsakseptans 40% under forventningen fra reflektansmålingen. Overflaten er såpass robust at smelten holdes på plass i lang tid, spesielt for kjøring 15 (se kommentar i tabell 3.1).



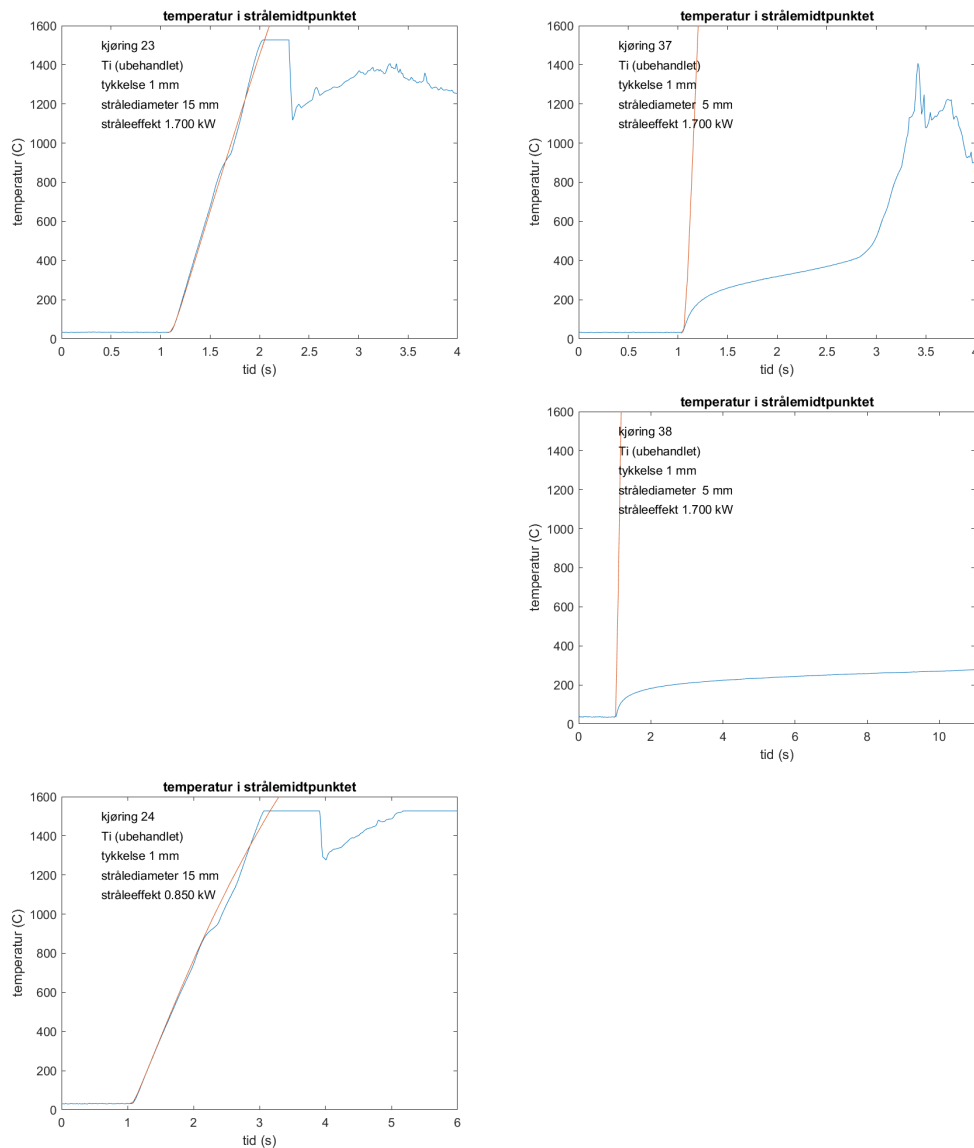
Figur 4.7 Hardanodisert aluminium. Også her ser vi ganske lik oppførsel som for ubehandlet (figur 4.5) og gul eloksert (figur 4.6) aluminium. Men også her ligger brukt verdi for strålingsakseptans 45% under forventningen fra reflektansmålingen.



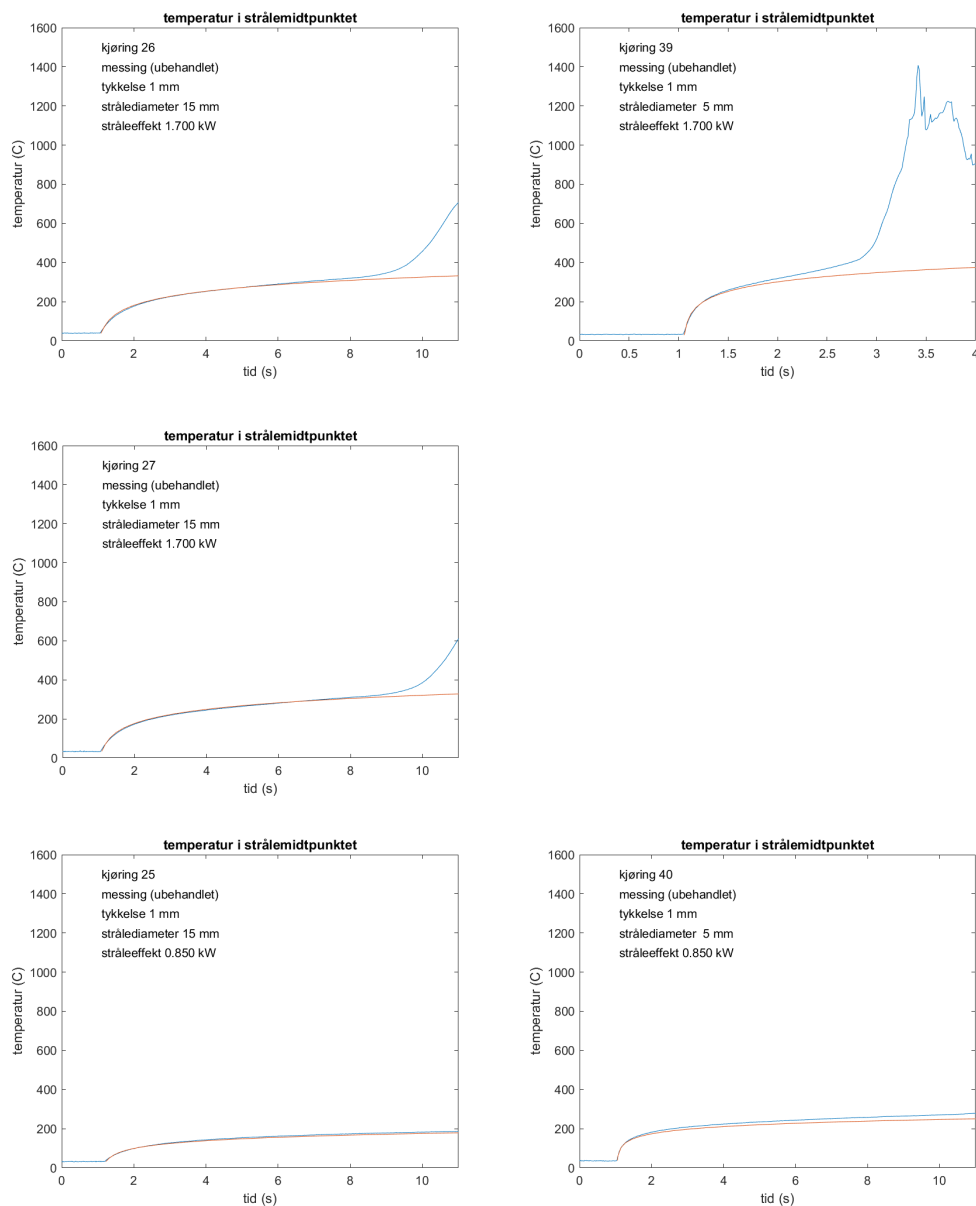
Figur 4.8 Svart eloksert aluminium. Nok en gang ser vi ganske lik oppførsel som for ubehandlet (figur 4.5), gul eloksert (figur 4.6) og hardanodisert (figur 4.7) aluminium. Og nok en gang ligger brukt verdi for strålingsakseptans 35% under forventningen fra reflektansmålingen. Det som er interessant er at den svarte fargen forsvinner under bestråling (se kommentarer i tabell 3.1).



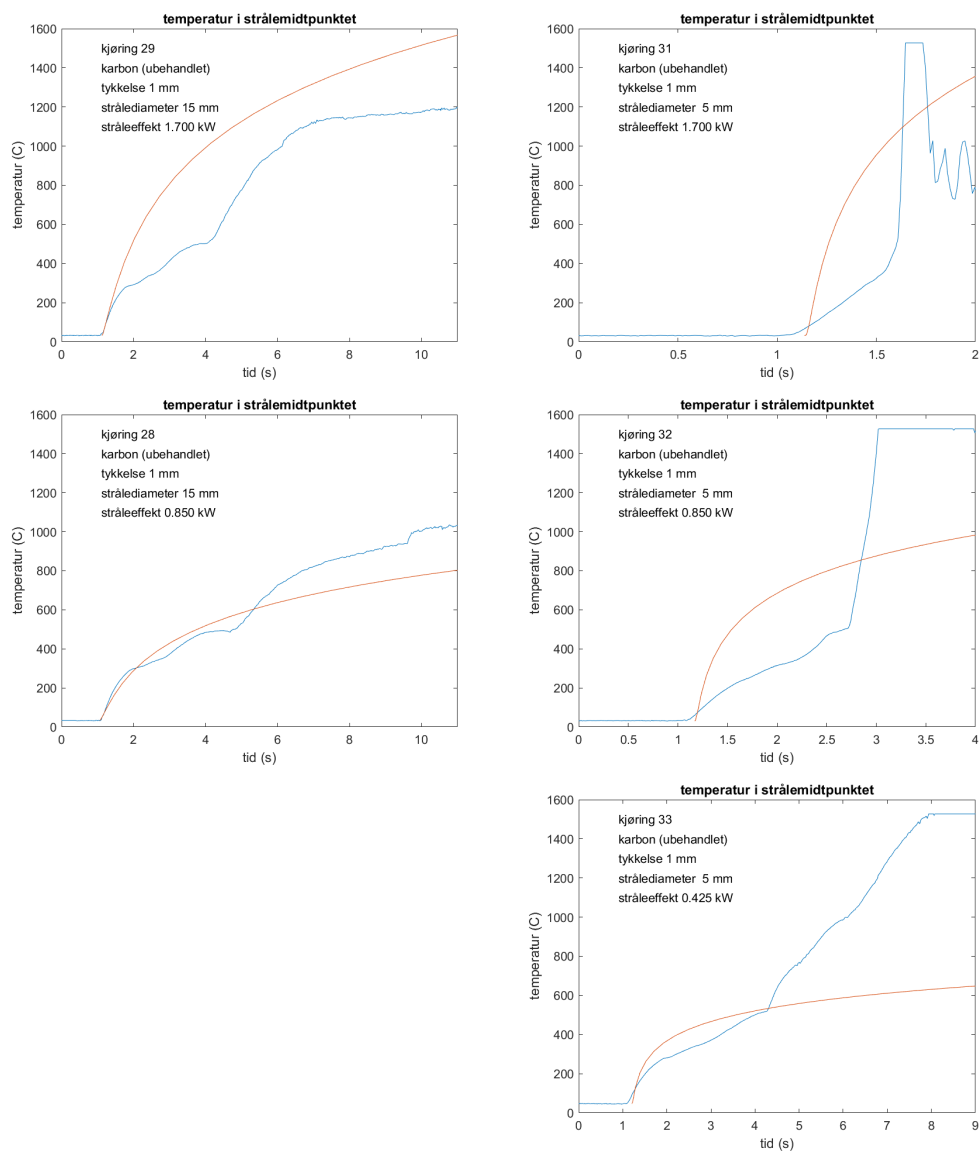
Figur 4.9 Passivert (Surtec) aluminium. Simuleringen beskriver målingene veldig bra opp til den første knekken i kurvene. Denne materialprøven skiller seg litt ut fra de andre materialprøvene basert på aluminium ved at brukt verdi for strålingsakseptans ligger kun 30% under forventningen fra refleksjonsmålingen – det er dermed den minste forskjellen (og dessuten den minste strålingsakseptansen) for alle materialprøver basert på aluminium. Det kan tyde på at denne overflatebehandlingen overlever muligens opp til høye temperaturer uten stor variasjon av strålingsakseptans. På den andre siden nevner kommentaren til kjøring 41 i tabell 3.1 en viss røykutvikling. Men røyken kan ha oppstått etter at smeltepunktet på rundt 600°C var nådd.



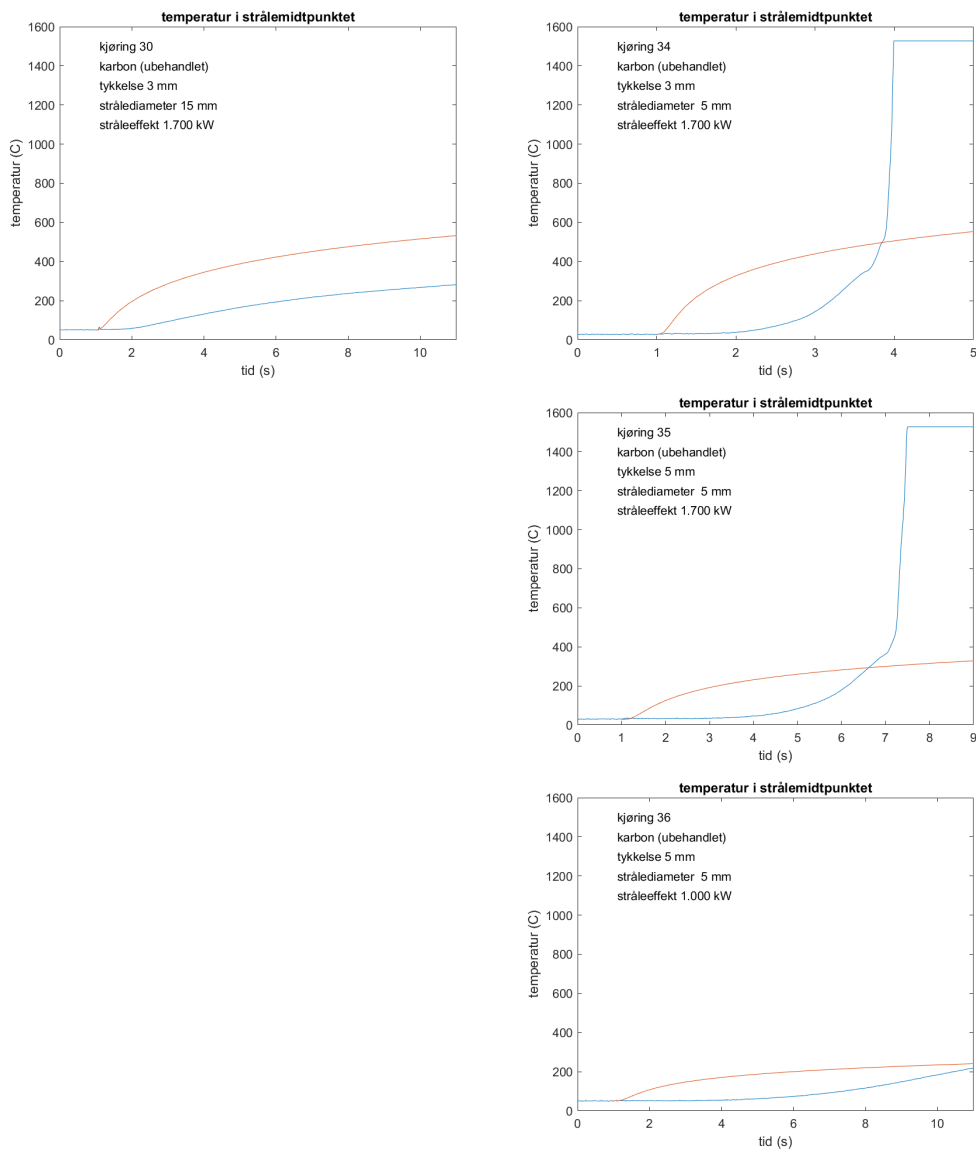
Figur 4.10 Ubehandlet titan. Her gikk det mye galt under kjøringene (se tabell 3.1). I kjøring 23 ble det observert flammeutvikling. Kjøringene med 5 mm strålediameter ble stoppet automatisk på grunn av feedback av lys tilbake inn i fiberen. Dette skjedde nesten umiddelbart etter oppstart av laseren. Den eneste kjøringen som noenlunde kan ansees som vellykket er kjøring 24 med svak effekt og stor strålediameter. Titan er i hvert fall kjent for sitt oksid TiO_2 , som er et veldig hyppig brukt pigment som reflekterer nesten alt synlig lys. Det er mulig at det ødelegger for våre kjøringene.



Figur 4.11 *Messing. Det er materialet med best samsvar mellom simulering og måling – i hvert fall opp til rundt 350°C (som ligger godt under smeltepunktet ved 980°C). Mest sannsynlig øker strålingsakseptansen voldsomt ved denne temperaturen slik at oppvarmingen skyter fart. Brukt strålingsakseptansen for simuleringen er kun 6,7%, som er under halvparten av forventningen fra reflektansmålingen. Kjøring 26 ble faktisk utført på samme punkt på platen som kjøring 25. Kun kjøringene 27 og 39 lagde hull i platen (kjøring 27 helt i slutten av bestrålingen og kjøring 39 under gnistring, se kommentarene i tabell 3.1).*



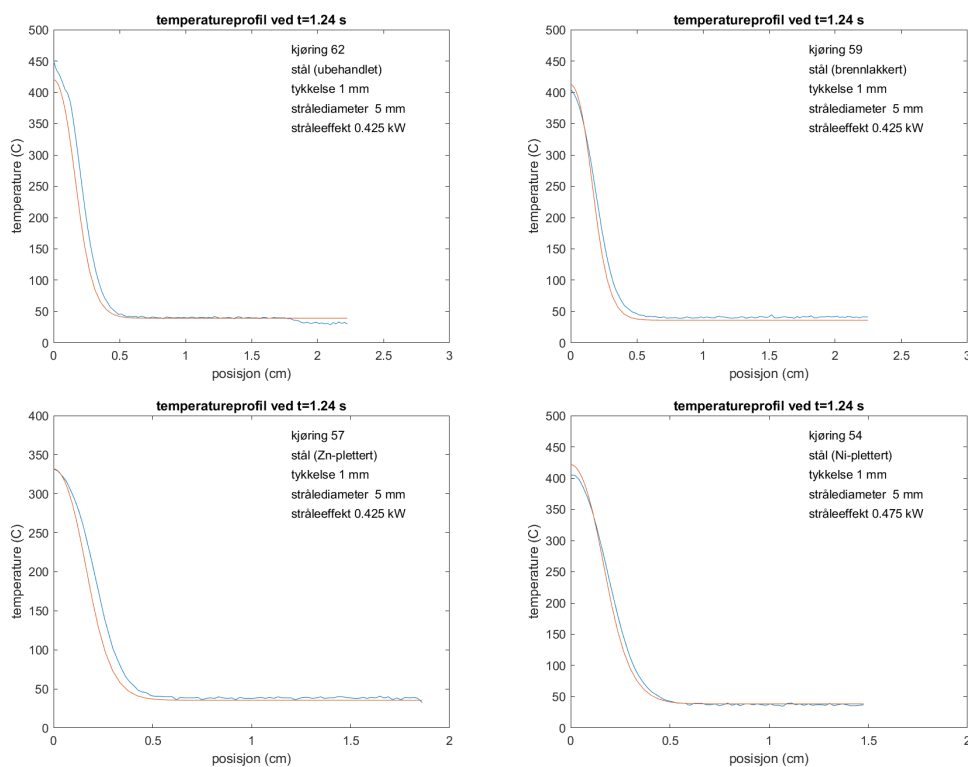
Figur 4.12 Karbonfiber med 1 mm platetykkelse. Det ser ikke ut som om man kan beskrive oppvarming av karbonplatene med vår enkel modell. Vi får et visst samsvar mellom simulering og måling opp til den første knekken i kurvene for kjøringene 28, 29 og 33, men de andre to kjøringene viser så å si ikke noe samsvar mellom modellen og målingen. Det er interessant at nettopp disse to kjøringene gir pene rettvegga hull, mens for eksempel kjøringene med 15 mm strålediameter brenner stort sett vekk kun resinet, men ikke karbonfibrene (se kommentarene i tabell 3.1). Der strålen brenner seg gjennom materialet spiller nok ablasjon en mye mer fremtredende rolle enn varmeledning. Derfor burde det ikke være overraskende at modellen ikke beskriver oppvarmingen på en tilfredsstillende måte.



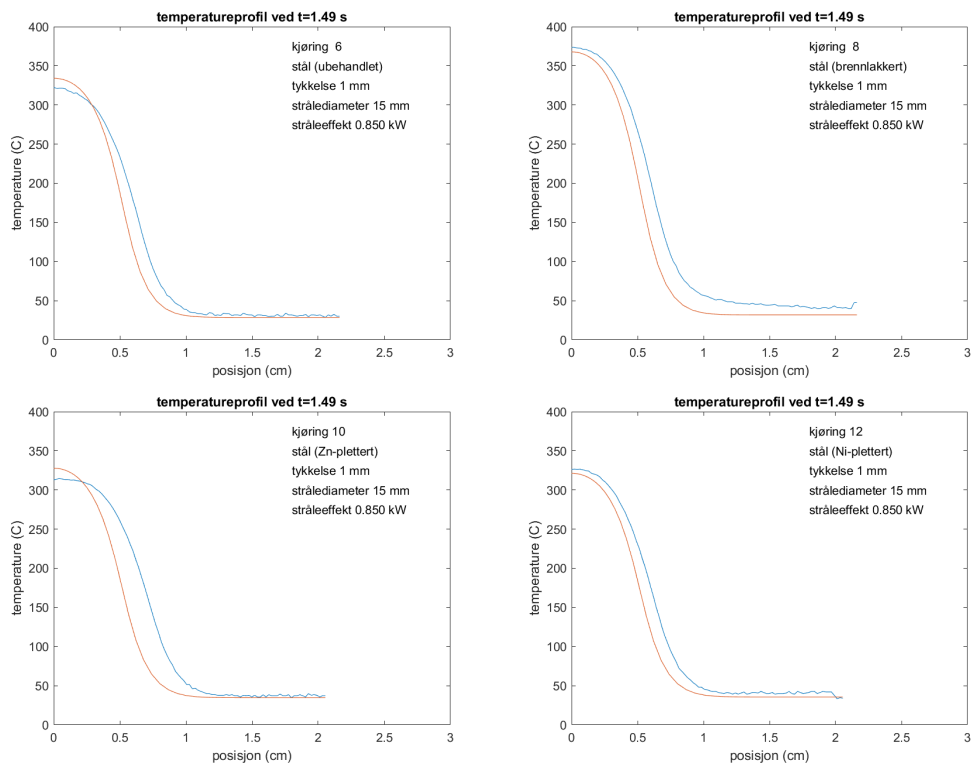
Figur 4.13 Karbonfiber med større platetykkelse. Observasjonene blir ganske like som for figur 4.12. Der strålen er svak (kjøring 36) eller effekten utspredd (kjøring 30) kan man ane en viss likhet mellom simuleringen og målingen (med noen sekunders mellomrom som strålen trenger for å brenne seg innover). Der strålen faktisk brenner seg fort gjennom platen (kjøringene 34 og 35) har man overhodet ikke samsvar mellom modellen og målingen. Siden Julie Bonkerud ved Nammo på Raufoss kommer til å simulere oppvarmingen med et kommersielt simuleringstøytøy (Comsol) som inkluderer effekter som smelting og ablasjon, blir det interessant å se om hennes simuleringer kommer til å være i bedre samsvar med målingene enn våre.

4.2 Profiler

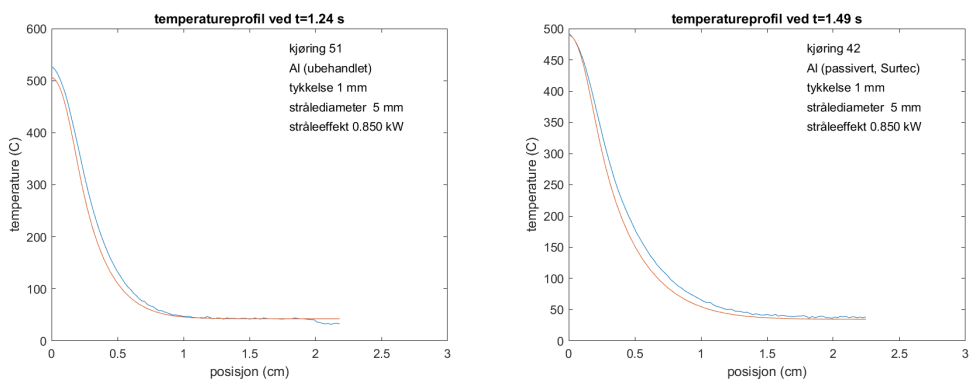
Mens tidsrekkene er mest sensitive for strålingsakseptansen, så gir temperaturprofiler langs en radius informasjon om selve varmeledningsevnen. Det gjelder i større grad for profiler som er tatt en god stund etter at bestrålingen har begynt. Profiler som er tatt kort tid etter at laseren ble slått på reproducerer egentlig kun stråleprofilen. Vi kommer derfor i det følgende til å fokusere mest på kjøringene med lav effekt og stor strålediameter fordi disse kjøringene varte lengst og man har bedre mulighet til å se om målt temperaturprofil kan beskrives med modellen som er basert på varmeledning. Vi kommer derfor ikke til å vise profiler fra alle kjøringene. Til gjengjeld, hvis en kjøring varte særlig lenge, så kan vi vise profiler fra to forskjellige tidspunkter.



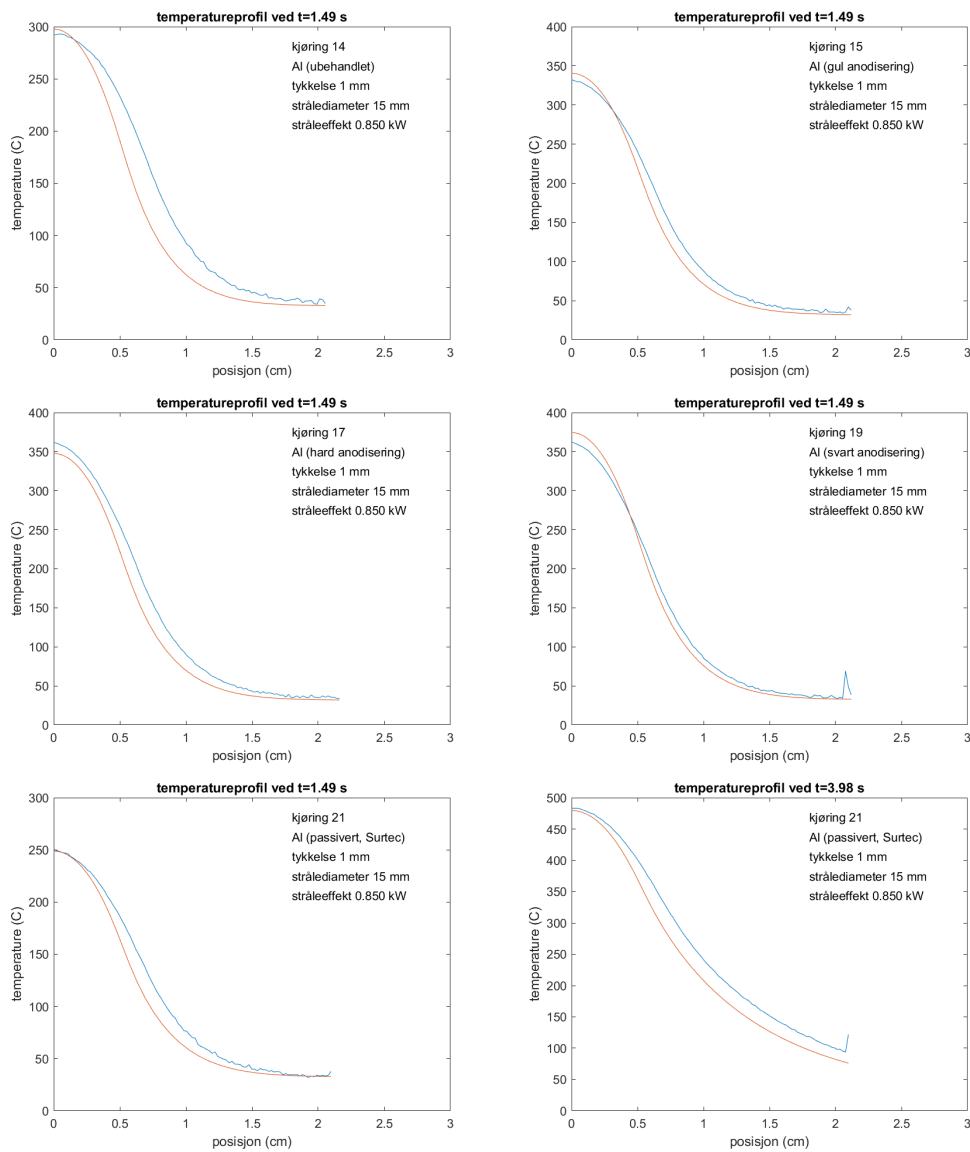
Figur 4.14 Stål, liten strålediameter. Alle disse profilene er tatt nokså kort tid etter at laseren slo seg på. Siden strålediameteren var lik for disse kjøringene og temperaturprofilen stort sett reproducerer stråleprofilen så er alle profiler veldig like og gir heller ikke mye informasjon om varmeledningen er modellert riktig.



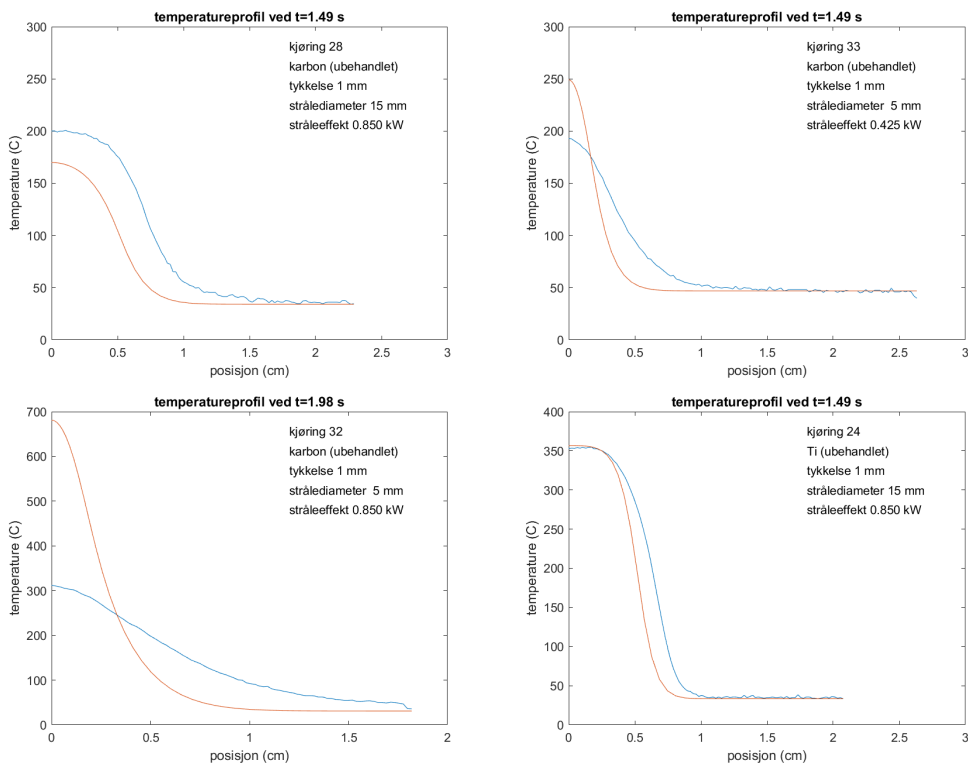
Figur 4.15 Stål, stor strålediameter. Disse profilene er tatt omtrent et halvt sekund etter at laseren ble slått på. Også disse temperaturprofilene reproducerer stort sett stråleprofilen, men man ser at de målte profilene er litt flatere på toppen og litt bredere generelt sett enn de modellerte profilene. Det kan tyde på at man underestimerer varmeledningsevnen litt i simuleringen. En annen mulig forklaring kan være at stråleprofilen ikke helt tilsvarende en top-hat, som er den fasongen som er brukt i modellen.



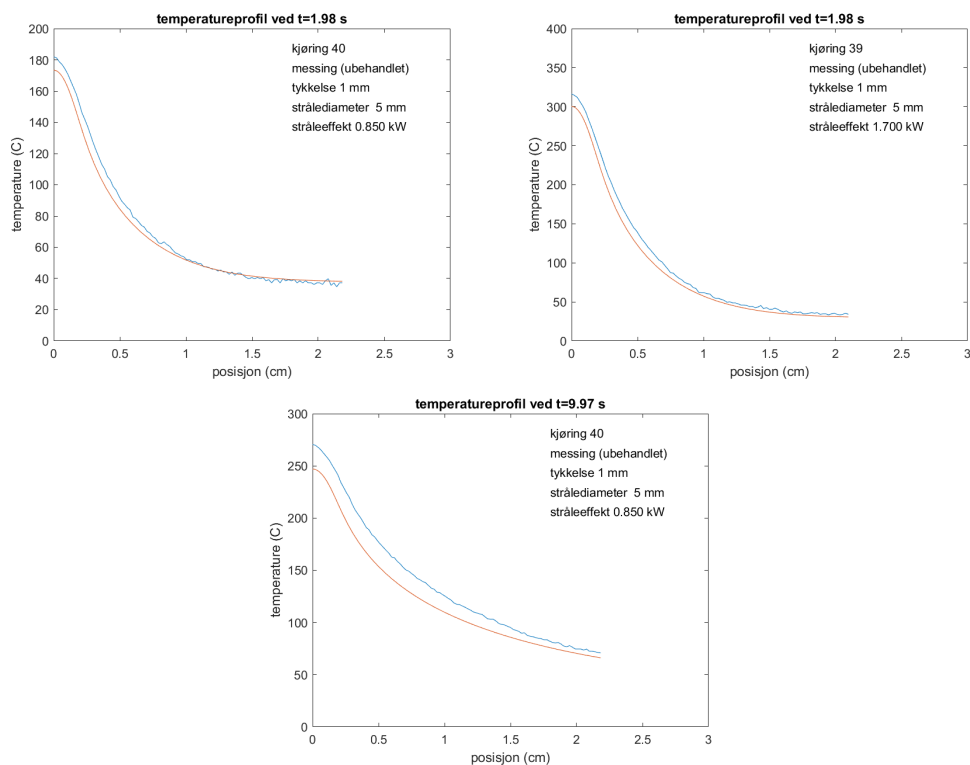
Figur 4.16 Aluminium, liten strålediameter. Profilen til ubehandlet aluminium er tatt kort tid etter at laseren slo seg på og er også representativ for tilsvarende profiler for eloksert eller anodisert aluminium. Profilen til passivert aluminium er tatt omtrent et halvt sekund etter at laseren ble slått på. Materialprøven med passivert aluminium er den eneste aluminiumbasert prøven som holdt ut så lenge, siden dens strålingsakseptans var lavest. Man ser veldig tydelig at profilen har forandret seg i forhold til ubehandlet aluminium. Det skjer innen såpass kort tid siden aluminium har en veldig stor varmeledningsevne – mye større enn stål. Man ser også at varmeledningsevnen til aluminium er reprodusert veldig bra, siden det er godt samsvar mellom måling og modell.



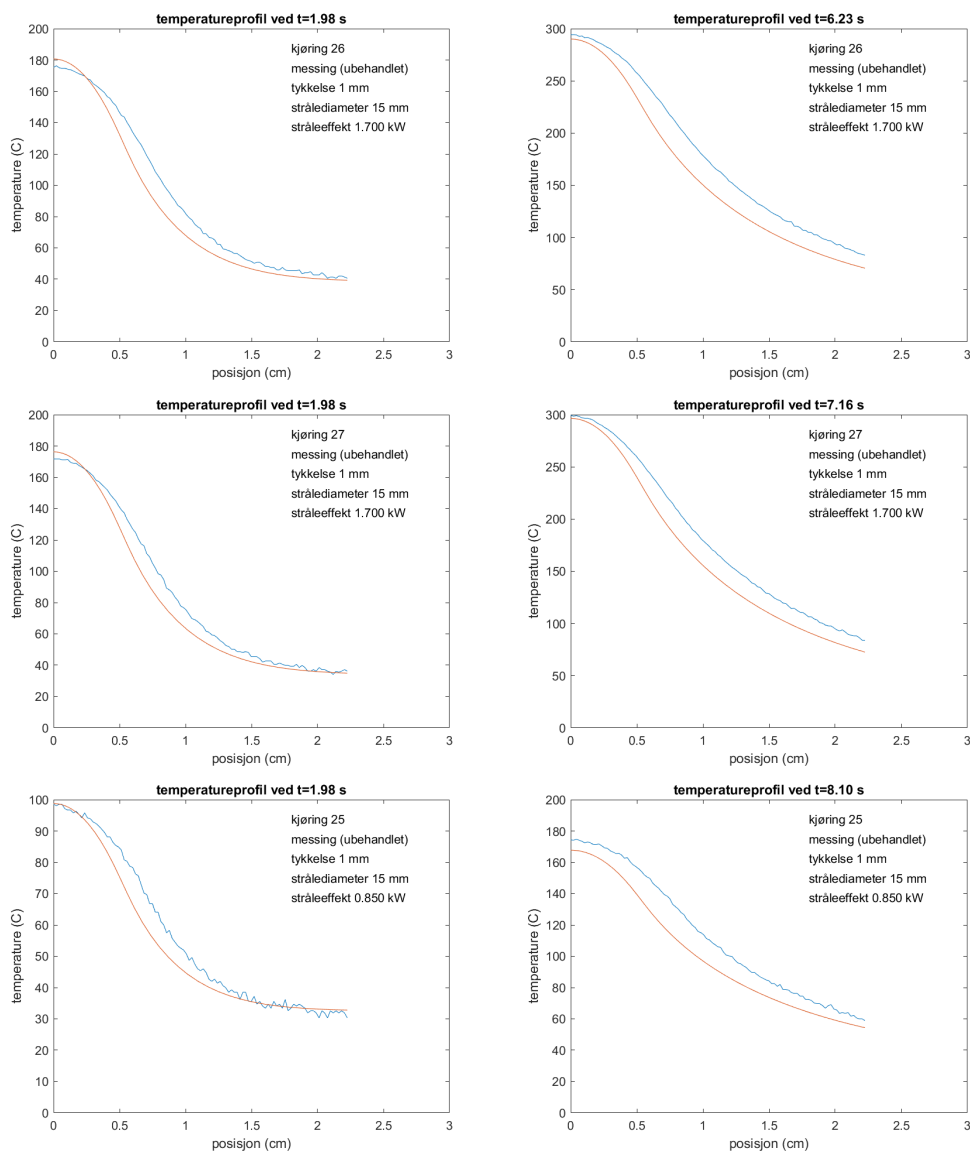
Figur 4.17 Aluminium, stor strålediameter. Profilene til ubehandlet aluminium og eloksert eller anodisert aluminium er alle tatt et halvt sekund etter at laseren slo seg på. Profilene er veldig like og samsvaret mellom målingen og modellen er veldig bra, selv om de målte profilene er litt bredere, akkurat som for stål (se figur 4.15). Det samme gjelder også passivert aluminium tatt ved samme tid (nederst til venstre). Det mest interessante er panelet nederst til høyre som viser profilen for passivert aluminium nesten tre sekunder etter at laseren ble slått på. At målingen stemmer så godt overens med modellen tyder på at varmeledning i aluminium er velmodellert i simuleringen.



Figur 4.18 Karbon og titan. Profilene i de øvre panelene er fra kjøringene der de målte tidsrekkene har et visst samsvar med simuleringene (se figur 4.12). Allikevel finner man ikke noe bra samsvar mellom de målte og simulerte profilene. Panelet nederst til venstre er fra en kjøring uten noe samsvar mellom målt og modellert tidsrekke. Heller ikke profilene viser noe form for samsvar. Nederst til høyre er profilen fra den eneste vellykkete kjøringen med titan (se figur 4.10). Målt profil til titan er igjen litt bredere enn simuleringen, akkurat som for stål (se figur 4.15) og aluminium (se figur 4.17).



Figur 4.19 Messing, liten strålediameter. Profilene i de øvre panelene er fra kjøringene med forskjellig effekt. Her ser man fint at profilene er ganske like i fasong (de er begge tatt rundt ett sekund etter at laseren slo seg på), mens temperaturen skalerer som forventet med effekt. Profilen nederst er veldig interessant siden den er tatt hele ni sekunder etter at laseren ble slått på. Det fortsatt gode samsvaret mellom målt og simulert profil tyder på at varmeledningsevnen i messing er velmodellert i simuleringen. Avviket ved små radier kan nok forklares ved at prøven ved det tidspunktet nådde omtrent 350°C (i hvert fall i strålesenteret på forsiden). Vi vet fra diskusjonen rundt figur 4.11 at ved denne temperaturen, så øker strålingsakseptansen trolig ganske mye og oppvarmingen plutselig begynner å skyte fart.



Figur 4.20 Messing, stor strålediameter. Profilene i de første to radene er fra to like kjøringer mens profilene i den nederste raden er fra en kjøring med mindre effekt. Profilene til venstre er alle tatt ett sekund etter at laseren slo seg på mens profilene til høyre er tatt en del sekunder senere. Man ser generelt et godt samsvar mellom målte og simulerte profiler. Dette bekrefter at varmeledningsevne til messing er velmodellert i simuleringen.

5 Konklusjoner og utsyn

Vi har etablert et laserskadelaboratorium på FFI. Oppsettet består av en kraftig laserkilde, optikk for strålelevering og sensorer for måling av temperatur og andre relevante mål på skadevirkning. Temperaturmålemetoden vi har utarbeidet er enkel i bruk og gir god måledata med liten innsats. Vi forventer derfor at laboratoriet blir et nyttig verktøy i FFIs forskning på laservåpenteknologi gjennom å gi verdifull innsikt i skademekanismer, skadeterskler og effekten av mottiltak ved belysning av relevante mål og materialer.

I mai 2023 har vi bestrålt 15 forskjellige materialprøver i tilsammen 58 kjøringene og målt temperaturøkningen på baksiden av prøvene helt frem til laserstrålen hadde brent seg gjennom materialet eller maksimal bestrålingstid var nådd. For å kunne tolke disse målingene har vi utviklet et simuleringsverktøy som er basert på teorien om varmeledningsevne. Med denne modellen kan vi beskrive oppvarmingen til de fleste materialene opp til smeltepunktet ved kun to parametere – diffusjonskonstanten for temperatur χ i [mm^2/s] og strålingsakseptansen, det vil si andelen av laserlyset som blir absorbert av materialet i [%]. Dette gir stort sett en god beskrivelse av temperaturøkningen over tid og langs en radius fra strålemidtpunkt. Et viktig resultat er at overflatebehandlingen av materialet har lite å si om strålingsakseptansen som kreves i modellen for en god beskrivelse av oppvarmingen – oppvarming av for eksempel alle materialprøver basert på stål eller aluminium beskrives best ved en strålingsakseptans rundt 25–40% uansett overflate. Reflektansmålinger ved romtemperatur (men ved lav effekt) antyder derimot en sterk varierende strålingsakseptans fra 23% opptil 90% for disse materialprøvene med en verdi rundt 60% for de fleste av dem. Dermed kan ikke reflektansmålinger brukes for å estimere verdien for strålingsakseptans som kreves i modellen.

Materialet som viser dårligst samsvar mellom måling og modell er karbonfiberplaten. Her brenner laserstrålen seg gjennom platen sannsynligvis ved ablasjon av materialet. Siden hverken ablasjon eller liknende prosesser er implementert i simuleringsverktøyet, er ikke dette avvirket overraskende. En simulering av oppvarmingen til karbonplater med for eksempel et kommersielt simuleringsverktøy der slike effekter kan implementeres (sammen med smeltingen av materialet, temperaturavhengige parametere og andre generaliseringer som vi ikke har i vår modell) kunne derfor være interessant for å lære mer om skadevirkningen av høyeffekts laserstråling.

A Oppvarming ved svak absorpsjon

Ved en veldig stor absorpsjonslengde slik at $\alpha L \ll 1$ kan eksponentialfunksjonen i det longitudinale integralet (se kapittel 2.3.2) approksimeres ved

$$e^{-\alpha|z|} \approx 1.$$

Dermed er det longitudinale integralet gitt ved

$$\frac{\alpha}{2} \int_{-L}^L \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(z-z'-2nL)^2}{4\chi(t-t')}} + e^{-\frac{(z+z'-2nL)^2}{4\chi(t-t')}} \right] dz'.$$

Her kan vi igjen sette sammen alle integraler over $\Delta z' = 2L$ brede striper til et integral fra $z' = -\infty$ til ∞ som vi har gjort i kapittel 2.2 siden integranden er periodisk. Dermed har vi

$$\frac{\alpha}{2} \int \left[e^{-\frac{(z-z')^2}{4\chi(t-t')}} + e^{-\frac{(z+z')^2}{4\chi(t-t')}} \right] dz' = 2\alpha\sqrt{\pi\chi}(t-t').$$

Hvis vi setter inn dette resultatet i tidsintegralet og bruker løsningen til det radielle integralet for en gaussisk stråleprofil, får vi

$$T_g^0(r, t) = \frac{2\alpha AP}{\pi \rho c_p} \int_0^t \frac{1}{W_0^2 + 8\chi(t-t')} e^{-\frac{2r^2}{W_0^2 + 8\chi(t-t')}} dt'.$$

Med substitusjonen $-\frac{2r^2}{W_0^2 + 8\chi(t-t')} \rightarrow \tau$ får vi

$$T_g^0(r, t) = \frac{\alpha AP}{4\pi\chi\rho c_p} \int_{-\frac{2r^2}{W_0^2}}^{-\frac{2r^2}{W_0^2 + 8\chi t}} \frac{1}{\tau} e^{\tau} d\tau,$$

som kan formuleres analytisk ved

$$T_g^0(r, t) = -\frac{\alpha AP}{4\pi\chi\rho c_p} \left[\text{Ei} \left(-\frac{2r^2}{W_0^2 + 8\chi t} \right) - \text{Ei} \left(-\frac{2r^2}{W_0^2} \right) \right],$$

der $\text{Ei}(x)$ er den eksponentielle integralfunksjonen.

Situasjonen som er skissert her kan anvendes der man ønsker å se på oppvarming av et transparent medium som for eksempel glass av en sterk laserstråle. I så fall kan man anta at transmisjonskoeffisienten $A = 1$. Videre kunne man tenke på hvor mye av laserstrålen blir transmittert ut av glasset inn i omgivelsen på baksiden (og ikke reflektert tilbake inn i glasset). Men også her kan man sikkert anta at alt blir transmittert. Videre kan man sikkert bruke resultatet som en approksimasjon også for linser som er nesten plan.

A.1 Oppvarming av fiberfez (engelsk end-cap)

Et annet eksempel av praktisk interesse som kan løses med samme greensfunksjon er oppvarmingen av en fiberfez. Her har vi igjen et tilfelle med svak absorpsjon, men med varierende strålebredde $W(z)$. Utgangspunktet for oppvarmingen er igjen avsatt varmeeffekt ved

$$p_{\text{heat}} = -\frac{\partial I}{\partial z} = \alpha I_0 e^{-\alpha z},$$

der vi igjen approksimerer $e^{-\alpha z} \approx 1$, mens vi modellerer intensiteten med en varierende strålebredde ved

$$I_0(r, z, t) = \frac{2P}{\pi W^2(z)} e^{-\frac{2r^2}{W^2(z)}},$$

altså igjen med en gaussisk stråleprofil.

Løsningen for dette oppvarmingsleddet skjer på samme vis som før, og ved hjelp av det radielle integralet for en gaussisk stråleprofil sitter man igjen med

$$T(r, z, t) = \frac{\alpha AP}{\pi^{3/2} \rho c_p} \int_0^L \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\chi(t-t')}} \frac{1}{W^2(z') + 8\chi(t-t')} e^{-\frac{2r^2}{W^2(z') + 8\chi(t-t')}} \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(z-z'-2nL)^2}{4\chi(t-t')}} + e^{-\frac{(z+z'-2nL)^2}{4\chi(t-t')}} \right] dz' dt'.$$

Videre forenklinger avhenger selvfølgelig av den konkrete funksjonen $W(z)$. På den andre siden, så er det sikkert en fordel å gjøre integranden regulær igjen ved substitusjonen $\chi(t-t')/L^2 \rightarrow \tau^2$. Dermed får vi

$$T(r, z, t) = \frac{2\alpha APL}{\pi^{3/2} \chi \rho c_p} \int_0^L \int_0^{\sqrt{\frac{\chi t}{L^2}}} \frac{1}{W^2(z') + 8L^2\tau^2} e^{-\frac{2r^2}{W^2(z') + 8L^2\tau^2}} \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(z-z'-2nL)^2}{4L^2\tau^2}} + e^{-\frac{(z+z'-2nL)^2}{4L^2\tau^2}} \right] dz' d\tau.$$

Om FFI

Forsvarets forskningsinstitutt ble etablert 11. april 1946. Instituttet er organisert som et forvaltningsorgan med særskilte fullmakter underlagt Forsvarsdepartementet.

FFIs formål

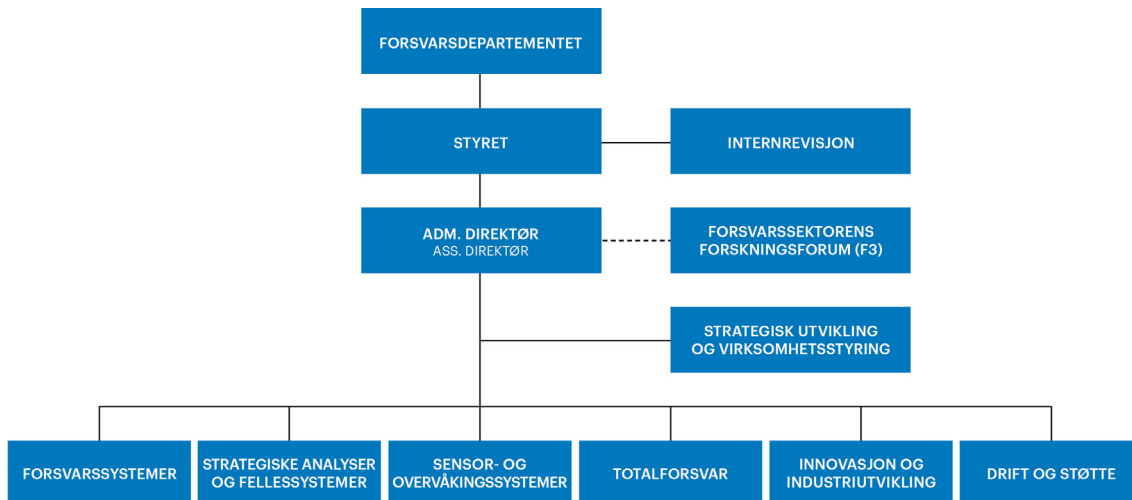
Forsvarets forskningsinstitutt er Forsvarets sentrale forskningsinstitusjon og har som formål å drive forskning og utvikling for Forsvarets behov. Videre er FFI rådgiver overfor Forsvarets strategiske ledelse. Spesielt skal instituttet følge opp trekk ved vitenskapelig og militærteknisk utvikling som kan påvirke forutsetningene for sikkerhetspolitikken eller forsvarsplanleggingen.

FFIs visjon

FFI gjør kunnskap og ideer til et effektivt forsvar.

FFIs verdier

Skapende, drivende, vidsynt og ansvarlig.



Forsvarets forskningsinstitutt (FFI)
Postboks 25
2027 Kjeller

Besøksadresse:
Kjeller: Instituttveien 20, Kjeller
Horten: Nedre vei 16, Karljohansvern, Horten

Telefon: 91 50 30 03
E-post: post@ffi.no
ffi.no

Norwegian Defence Research Establishment (FFI)
PO box 25
NO-2027 Kjeller
NORWAY

Visitor address:
Kjeller: Instituttveien 20, Kjeller
Horten: Nedre vei 16, Karljohansvern, Horten

Telephone: +47 91 50 30 03
E-mail: post@ffi.no
ffi.no/en